아주대학교

문제편

25문항

원문 수학 26-50번을 교재 1-25번으로 정리했습니다. 한 페이지에 3문항씩, 마지막 장에는 25번을 실었습니다. 별표 11·13·14번은 기존 해설의 해석에 맞춘 편집 보완입니다.

01 다음 값은? $\sin\left(2\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right)-\cos\left(2\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)$.

① $-\frac{31}{25}$

② $-\frac{17}{25}$

③ $\frac{13}{25}$

④ $\frac{17}{25}$

⑤ $\frac{31}{25}$

02 극한의 값은?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\frac{5}{4}}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

① $-\frac{5}{4}$

② -1

③ $\frac{5}{4}$

④ 1

⑤ 0

03 실수 전체에서 미분가능한 함수 f에 대해 $g(x)=\sqrt{3e^{x}+(f(x))^{2}}$이다. $f(0)=1$, $f'(0)=-5$이면 $g'(0)$의 값은?

① $-\frac{9}{4}$

② $-\frac{7}{4}$

③ 1

④ $\frac{7}{4}$

⑤ $\frac{9}{4}$

아주대학교

04 곡선 $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$의 길이는?

① $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$
② $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$
③ $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$
④ 1
⑤ $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

05 멱급수의 수렴반경은?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n n!}{n^n} x^n.$$

① 1
② $\frac{1}{e}$
③ e
④ $\frac{2}{e}$
⑤ $\frac{e}{2}$

06 다음 보기에서 수렴하는 이상적분은 모두 몇 개인가?

ㄱ. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
ㄴ. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,\mathrm{d}x$
ㄷ. $\int_0^1 \frac{1}{\ln(2x)}\,\mathrm{d}x$
ㄹ. $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln(2x))^2}\,\mathrm{d}x$

① 0개
② 1개
③ 2개
④ 3개
⑤ 4개

아주대학교

07 뉴턴의 냉각법칙에서 냉각속도는 물체와 주변의 온도 차이에 비례한다. 주변온도는 $20°\mathrm{C}$로 일정하고, $80°\mathrm{C}$인 커피가 1분 후 $50°\mathrm{C}$가 되었다. 1분 더 지난 후의 온도는?

① $40°\mathrm{C}$ ② $35°\mathrm{C}$
③ $30°\mathrm{C}$ ④ $25°\mathrm{C}$
⑤ $20°\mathrm{C}$

08 초깃값 문제의 해를 y라 할 때 $y(2)$의 값은?

$$y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2, \quad y(1) = \frac{1}{1+\ln 2}.$$

① $-\dfrac{1}{32}$ ② $-\dfrac{1}{8}$
③ $-\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{32}$
⑤ $\dfrac{1}{16}$

09 함수 $f(x) = \frac{\arctan x}{1-x+x^2}$의 3차 매클로린 다항식 $T_3(x)$는?

① $x + x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$ ② $x + x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$
③ $x - x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$ ④ $1 - x - \dfrac{1}{3}x^3$
⑤ $1 - x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$

아주대학교

10 곡선 $y=\sqrt{\sin(\ln x)}$, $1\le x\le e^{\pi}$와 x축으로 둘러싸인 영역을 x축 주위로 회전한 입체의 부피는?

① π
② $\dfrac{\pi}{2}(e^{\pi}-1)$
③ $\pi(e^{\pi}-1)$
④ $\pi(1+e^{\pi})$
⑤ $\dfrac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$

11* $a>0$에 대해 곡선

$$y=\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$$

과 x축 사이의 $0\le x\le a$인 영역을 y축 주위로 회전한 입체의 부피를 $V(a)$라 하자. (영역은 기존 해설이 적분한 범위에 맞춘 편집 보완이다.) $\lim_{a\to\infty}V(a)$의 값은?

① $\dfrac{\pi}{120}$
② $\dfrac{\pi}{60}$
③ $\dfrac{\pi^2}{60}$
④ $\dfrac{\pi}{240}$
⑤ $\dfrac{\pi^2}{240}$

12 선적분의 값은?

$$\oint_C (y^2+2y)\,\mathrm{d}x+(2xy+4x)\,\mathrm{d}y.$$

단, C는 $A=(-1,-1)$, $B=(2,-1)$, $C=(1,2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 경계를 반시계 방향으로 도는 단순 폐곡선이다.

① 9
② 3
③ 0
④ -3
⑤ -9

아주대학교

13* 순증가 함수 f가

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

를 만족할 때 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가? (둘째 극한의 방향은 기존 해설의 해석에 맞춘 편집 보완이다.)

ㄱ. 모든 x에 대해 $f(f(x)) > f(x)$이다.
ㄴ. f가 모든 점에서 연속이면 역함수가 존재한다.
ㄷ. f가 모든 점에서 연속이면 역함수도 모든 점에서 연속이다.
ㄹ. f가 모든 점에서 미분가능하면 역함수도 모든 점에서 미분가능하다.

① 0개 ② 1개
③ 2개 ④ 3개
⑤ 4개

14* 모든 양의 실수 x에 대해

$$3e^x - 3e^{-x} - 6x - x^3 > ax^5$$

가 성립하는 a의 최댓값은? ('최댓값'은 기존 해설의 해석에 맞춘 편집 보완이다.)

① 1 ② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{20}$
⑤ $\frac{1}{100}$

15 미분가능한 함수 $f(x,y)$가 다음 표의 값을 가진다. $g(x,y) = \sqrt{3x^2 + 2y^2 - 8f(x,y)}$의 $(1,-1)$에서의 일차 근사를 이용한 $g(1.2,-1.01)$의 근삿값은?

(a,b)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$
$f(a,b)$	0.2	−0.4	0.5	0.3
$f_x(a,b)$	0.5	0.2	1.5	−1.2
$f_y(a,b)$	2.5	0.5	−2.5	0.5

① 0.3 ② 0.32
③ 0.34 ④ 0.36
⑤ 0.38

아주대학교

16 곡선 $C : x = 2\cos t,\ y = 3\sin t\ (0 \le t \le 2\pi)$에 대한 선적분의 값은?

$$\frac{1}{2}\int_C \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \right).$$

① $-\pi$ ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ π

17 극좌표 곡선 $r = 1 + 2\cos\theta$에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$에 대응하는 점의 접선이 x축과 만나는 점의 직교좌표는?

① $(-8, 0)$ ② $(-4, 0)$
③ $(0, 0)$ ④ $(4, 0)$
⑤ $(8, 0)$

18 $x^2 + y^2 \le 1$에서 $x^2 + 2xy - y^2$의 최댓값은?

① $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ② $\frac{1}{2}$
③ 1 ④ $\sqrt{2}$
⑤ 2

아주대학교

19 곡면 $S_1 : x^2 - y^2 + 2z^2 = -1$, $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 6$의 교점 $(1, 2, -1)$에서 두 접평면의 교선은

$$x = 1 + \alpha t, \quad y = 2 + \beta t, \quad z = -1 - 2t$$

이다. $\alpha + \beta$의 값은?

① -4 ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ 5 ⑤ 7

20 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 조건수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$은 발산한다.
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$은 수렴한다.
ㄷ. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} < \frac{1}{\ln 2}$.
ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이 1이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

21 실수 전체에서 다음과 같이 정의된 함수 f에 대한 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}.$$

ㄱ. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
ㄴ. f는 최솟값 0과 최댓값 1을 갖는다.
ㄷ. f는 실수 전체에서 미분가능하다.
ㄹ. $f''(0)$은 존재하지 않는다.

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

아주대학교

22 다음 적분의 값은?

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\sqrt{3}y} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

① $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

③ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ④ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

⑤ $\frac{1}{2}$

23 다음 23–25번 공통 지문에서 $\alpha+\beta$의 값으로 적절한 것은?

23–25번 공통 지문: 이상적분 $I=\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-4x^{-2}}\,\mathrm{d}x$를 다음과 같이 변형한다.

$$I = e^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-\left(x+\beta x^{-1}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

$x=\gamma t^{-1}$로 치환하면

$$I = e^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-\left(t+\beta t^{-1}\right)^2}\gamma t^{-2}\,\mathrm{d}t,$$

따라서

$$2I = e^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-\left(x+\beta x^{-1}\right)^2}\left(1+\gamma x^{-2}\right)\mathrm{d}x.$$

마지막으로 $u=x+\beta x^{-1}$로 치환하여

$$2I = e^{-\alpha}\int_\mu^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

알려진 값 $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$를 이용하여 I를 구할 수 있다.

① -4 ② -2

③ 0 ④ 2

⑤ 4

24 23번 공통 지문에서 다음 극한의 값은?

$$\lim_{x\to\mu}\left(1+\gamma x^{-1}\right)^{|x|}.$$

① e^{-4} ② e^{-2}

③ 1 ④ e^{2}

⑤ e^{4}

아주대학교

25 이상적분의 값은?

$$\int_0^\infty e^{-x^2} e^{-4x^{-2}}\,\mathrm{d}x.$$

① $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-4}$

② $\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-4}$

③ 1

④ $\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{4}$

⑤ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{4}$