중앙대학교

문제편

30문항 · 60분

01 아래 극한을 만족하는 양수 a의 값은?

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+\tan x}-\sqrt{a+\sin x}}{x^3}=\frac{1}{32}.$$

① 8 ② 16
③ 32 ④ 64

02 아래 행렬 A와 $x=\frac{1}{4}$에 대하여 급수의 값은? $\mathrm{tr}(B)$는 대각합이며, $A^0=I$, $A^k=A^{k-1}A$이다.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{tr}\left(A^k\right)x^{k-1}.$$

① $\frac{95}{8}$ ② $\frac{96}{7}$
③ $\frac{97}{6}$ ④ $\frac{98}{5}$

03 아래 정사각행렬 A, B에 대하여 $\det B=k\det A$를 모든 A에서 만족하는 상수 k의 값은?

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4\end{pmatrix}.$$

$$B=\begin{pmatrix}b_1+c_1+d_1 & b_2+c_2+d_2 & b_3+c_3+d_3 & b_4+c_4+d_4\\ a_1+c_1+d_1 & a_2+c_2+d_2 & a_3+c_3+d_3 & a_4+c_4+d_4\\ a_1+b_1+d_1 & a_2+b_2+d_2 & a_3+b_3+d_3 & a_4+b_4+d_4\\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 & a_4+b_4+c_4\end{pmatrix}.$$

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3

중앙대학교

04 아래 연립방정식이 무한히 많은 해를 갖도록 하는 상수 a의 값을 모두 곱하면?

$$\begin{cases} x+y+2z=-3 \\ 2x+y+3z=-2a. \\ -3x+4y+z=a^2 \end{cases}$$

① 14
② 6
③ -9
④ 33

05 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ 위의 점 P에서 그은 두 접선이 단위원 $x^2+y^2=1$과 각각 A, B에서 접한다. 내적 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값은?

① $\frac{115}{234}$
② $\frac{511}{432}$
③ $\frac{151}{342}$
④ $\frac{151}{324}$

06 선형사상 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$가 아래를 만족할 때, $a+b$의 값은?

$$T(-1,1)=(2,9,0),\quad T(0,1)=(3,3,4),$$
$$T(a,b)=(0,21,-8).$$

① -2
② 0
③ 1
④ 3

중앙대학교

07 아래 적분값을 α라 할 때, $\sin(2\alpha)$의 값은?

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \alpha.$$

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$
③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

08 곡선 C는 $(0,0) \to (0,4) \to (2,4) \to (0,0)$의 순서로 도는 삼각형의 둘레이다. 아래 선적분의 값은?

$$\int_C (y\cos x - xy\sin x)\,\mathrm{d}x + (xy + x\cos x)\,\mathrm{d}y.$$

① $-\frac{16}{3}$ ② $-\frac{32}{3}$
③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{16}{3}$

09 함수 $f(x) = (1+x^5)^{30}$에 대하여 $f^{(10)}\frac{0}{10!}$의 값은?

① 345 ② 435
③ 543 ④ 534

중앙대학교

10 곡면 $x^2+y^2=\frac{z^2}{4}$와 평면 $x+y+z=1$의 교선이 이 평면에서 둘러싸는 영역의 넓이는?

① $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
② $\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$
③ π
④ $\sqrt{\frac{3}{2}}\pi$

11 두 멱급수의 수렴반지름이 각각 2와 3이다. 아래 새 급수의 수렴반지름은?

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{5^n} + \frac{d_n}{4^n} \right) x^n.$$

① 10
② 20
③ 25
④ 50

12 아래 선형사상 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$의 핵의 차원이 2가 되도록 a를 정하면?

$$T(x,y,z,w) = (3x-3y-z-4w,$$
$$2x-7y-6w, -x+2y+az+2w).$$

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{5}$

중앙대학교

13 $0 \le x \le 1$에서 곡선 $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$의 길이는?

① $\sqrt{2}$
② $2\sqrt{2}$
③ $2-\sqrt{2}$
④ $4-2\sqrt{2}$

14 $f(0)=1$, $f(1)=10$인 이차함수 f에 대하여 아래 부정적분이 유리함수일 때, $f(2)$의 값은?

$$\int \frac{f(x)}{x^3(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

① 9
② -9
③ -19
④ 29

15 연속함수 f는 모든 실수에서 $f(-x)=f(x)$, $f(x+3)=f(x)$를 만족하고 아래 적분값을 갖는다. $\int_{-4}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x$의 값은?

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5, \quad \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 7.$$

① 26
② 28
③ 30
④ 32

중앙대학교

16 곡선 C가 아래와 같을 때, $\int_C \frac{1}{x}\,ds$의 값은? s는 호의 길이 매개변수이다.

$$C = \left\{(\cos t, \sin t) \mid 0 \le t \le \frac{\pi}{4}\right\}.$$

① $\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$ ② $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

③ $\ln\sqrt{3}$ ④ $\ln\sqrt{2}$

17 $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{2}+y=1$로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 직사각형 중 한 변이 $\frac{x}{2}+y=1$ 위에 놓인 직사각형의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$

③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

18 아래 극한의 값은?

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\pi k}{n}\sin\left(\frac{\pi jk}{4mn}\right)\frac{1}{mn}.$$

① $2\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)$ ② $4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)$

③ $4\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)$ ④ $2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)$

중앙대학교

19 아래 극한의 값은?

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^2\sin(x^3)-6x^5+x^{11}}{x^{17}}.$$

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{15}$

③ $\frac{1}{20}$ ④ $\frac{1}{60}$

20 평면 $z=2-\frac{x}{2}$와 곡면 $z=\sqrt{x^2+y^2}$으로 둘러싸인 비스듬한 원뿔의 옆면 넓이는?

① $\frac{32\sqrt{6}}{9}\pi$ ② $\frac{16\sqrt{6}}{9}\pi$

③ $\frac{64\sqrt{6}}{9}\pi$ ④ $\frac{64\sqrt{3}}{9}\pi$

21 선형사상 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$가 $T(x,y,z)=(3x+y+2z,x+y,2x+4z)$이다. 단위구면 위에서 $\|(T\circ T)(x,y,z)\|$의 최댓값은? $T\circ T$는 T를 두 번 적용한 것이고 $\|\cdot\|$은 유클리드 길이이다.

① 16 ② $16+6\sqrt{7}$

③ $16+8\sqrt{7}$ ④ $16+9\sqrt{7}$

중앙대학교

22 아래 함수 f에 대한 반복적분의 값은?

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty (x+2y)^2 f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

① $\frac{5}{4}+\frac{4}{\pi}$ ② $\frac{5}{4}+\frac{2}{\pi}$
③ $\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi}$ ④ $\frac{5}{2}+\frac{2}{\pi}$

23 선형사상 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{P}_2(x)$의 상이 아래와 같다. $\mathbb{R}^3$의 표준기저와 다항식의 순서기저 $\{1,x,x^2\}$에 대한 표현행렬을 A라 하자. $\mathbb{P}_2(x)$는 차수가 2 이하인 실수계수 다항식 공간이다. 아래 조건에서 $a_1+a_2+a_3$의 값은?

$$T(e_1)=1-x^2,\quad T(e_2)=x+x^2,$$
$$T(e_3)=-1+x,\quad A^{100}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

① $\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{99}}$ ② $\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{100}}$
③ $\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{100}}$ ④ $\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{99}}$

24 아래 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=0$의 실근은?

$$f(x)=\det\begin{pmatrix}x & x-1 & x-2 & x-3\\ x-1 & x-2 & x-3 & x\\ x-2 & x-3 & x & x-1\\ x-3 & x & x-1 & x-2\end{pmatrix}.$$

① -3 ② 3
③ $-\frac{3}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$

중앙대학교

25 실수값을 갖는 수열 a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$에 대한 아래 보기 중 참인 명제는 몇 개인가?
(가) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.
(나) 위의 두 급수가 모두 수렴하면 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$도 수렴한다.
(다) 위의 두 급수가 모두 발산하면 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$도 발산한다.
(라) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$이 발산하며 모든 $n \geq 0$에서 $b_n \neq 0$이면 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$은 수렴한다.
① 0개 ② 1개
③ 2개 ④ 3개

26 $y = \frac{x+3}{x^3}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$으로 둘러싸인 영역을 y축 둘레로 회전시킨 입체의 부피는?
① $69\dfrac{\pi}{16}$ ② $69\dfrac{\pi}{8}$
③ $2\pi\left(\ln 4 + \dfrac{9}{4}\right)$ ④ $2\pi\left(\ln 16 + \dfrac{9}{2}\right)$

27 $f(x) = 3x + 2\cos x$일 때, $(f^{-1})''(2)$의 값은?
① $\dfrac{2}{27}$ ② $\dfrac{2}{9}$
③ $-\dfrac{2}{9}$ ④ $-\dfrac{2}{27}$

중앙대학교

28 아래 급수의 값은?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{1}{n(n+1)}}\right).$$

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$
③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{6}$

29 아래 두 급수의 합을 각각 a, b라 할 때, ab의 값은?

$$a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(\sqrt{3}\right)^{2n}},$$
$$b=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left(\sqrt{3}\right)^{2n+1}}.$$

① $3\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{4}$
③ $\frac{\pi}{6}$ ④ $\frac{\pi}{8}$

30 아래 벡터장 F와 원판 S에 대한 유량 $\iint_S F\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$의 값은? S의 방향은 $(0,0,-1)$이다.

$$F(x,y,z)=\left(xy+xe^{z^2},-2y^2-ye^{z^2},z+x^2\right),$$
$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1, z=0\right\}.$$

① $-\frac{\pi}{4}$ ② $-\frac{\pi}{2}$
③ $-\pi$ ④ 0