성균관대학교

문제편

20문항

한 페이지에 3문항씩 배치했습니다. 원문 수학 26-45번은 교재 1-20번에 대응합니다. 9번*은 경계점 수렴을 명시했고, 20번*은 표준 프로베니우스 형태의 첫 계수가 영이 아님을 명시했습니다.

01 실수 a에 대해 아래 멱급수의 수렴구간은 $(-4, 14)$이다. 이 구간에서 급수의 합을 $f(x)$라 할 때 $f(1)$의 값은?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{3^{2n+2}}.$$

① -1

② $-\dfrac{5}{14}$

③ $-\dfrac{4}{13}$

④ $\dfrac{2}{7}$

⑤ $\dfrac{3}{2}$

02 다음 이중적분의 값은?

$$\int_{0}^{1} \int_{\sqrt{y}}^{1} \arctan(x^{3})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

① $\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\ln 2}{12}$

② $\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\ln 2}{6}$

③ $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\ln 2}{6}$

④ $2\dfrac{\pi}{9} - \dfrac{\ln 2}{12}$

⑤ $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 4}{7}$

03 유클리드 내적공간 $\mathbb{R}^4$에서 $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,1,1,0)$, $v_3 = (0,2,3,4)$이다. v_3를 v_1, v_2가 생성하는 평면에 직교정사영한 벡터가 $a v_1 + b v_2$일 때 $a + b$의 값은?

① 1

② -1

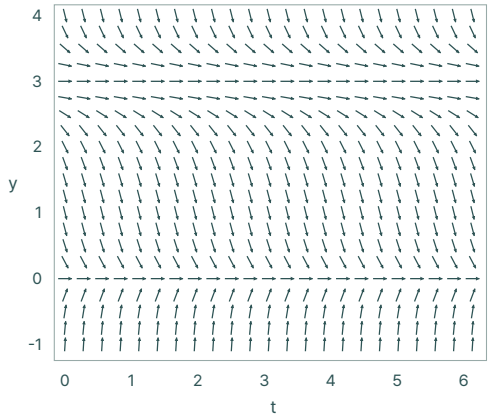
③ 2

④ -2

⑤ 0

성균관대학교

04 다음 방향장을 가질 수 있는 미분방정식은?



① $\dfrac{dy}{dt} = -y(y-3)^2$

② $\dfrac{dy}{dt} = -y^2(y-3)$

③ $\dfrac{dy}{dt} = y(y-3)$

④ $\dfrac{dy}{dt} = y(y-3)^2$

⑤ $\dfrac{dy}{dt} = -y(y-3)$

05 곡선 $x = 1 + y^2$와 직선 $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전하여 생기는 입체의 부피는?

① $8\dfrac{\pi}{15}$

② $3\dfrac{\pi}{4}$

③ $22\dfrac{\pi}{3}$

④ 10π

⑤ $21\dfrac{\pi}{2}$

06 다음 행렬의 계수가 최소가 되도록 하는 모든 실수 a의 합은?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 4 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

성균관대학교

07 밀도가 일정한 영역 D의 무게중심 좌표는?

$$D=\{(x,y)|\ 1\le x^2+y^2\le 4,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\}.$$

① $\left(\frac{31}{9\pi},\frac{31}{9\pi}\right)$
② $\left(\frac{32}{9\pi},\frac{32}{9\pi}\right)$
③ $\left(\frac{28}{9\pi},\frac{28}{9\pi}\right)$
④ $\left(\frac{29}{9\pi},\frac{29}{9\pi}\right)$
⑤ $\left(\frac{10}{3\pi},\frac{10}{3\pi}\right)$

08 아래 미분방정식의 특수해를 미정계수법으로 $y_p(t)=Q(t)e^{-4t}$로 설정할 때 다항식 $Q(t)$의 차수는?

$$y''+8y'+16y=(3t^3+2024t^5)e^{-4t}.$$

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

09* 수렴반경이 1인 멱급수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$가 아래 조건을 만족한다. 경계점 $x=1$에서도 급수가 수렴하여 그 합을 $f(1)$이라 한다. $f(1)\le m$을 항상 보장하는 실수 m의 최솟값은?

(가) $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$.
(나) 모든 정수 $n\ge 3$에 대해 $f^{(n)}(0)\le\frac{n!}{n^2-3n+2}$이다.

① 2
② $\frac{5}{2}$
③ 3
④ $\frac{13}{3}$
⑤ 5

성균관대학교

10 선형변환 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$가 $T(x,y,z,w)=\big(x+y,x-y,0,\sqrt{3}w\big)$로 정의된다. T의 고유값이 아닌 것은?

① $\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$ ④ $-\sqrt{3}$

⑤ 0

11 아래처럼 정의된 평면곡선 C에 대해 벡터장 $\boldsymbol{F}(x,y)=(-y,x)$의 선적분 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$의 값은?

$$C(t)=\begin{cases}(2(1+\cos t),1+\sin t) & 0\le t\le 3\frac{\pi}{2}\\ \left(\frac{4}{\pi}t-4,\frac{2}{\pi}t-3\right) & 3\frac{\pi}{2}\le t\le 2\pi\end{cases}.$$

① $3\pi+1$ ② $\dfrac{\pi}{2}+3$

③ $4\pi+2$ ④ $3\pi+2$

⑤ $2\dfrac{\pi}{3}+2$

12 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

(가) $y_1(t)=e^t$, $y_2(t)=te^t$가 $(-\infty,\infty)$에서 $y''+p(t)y'+q(t)y=0$의 기본해집합이면, $y_3(t)=e^{t+1}$, $y_4(t)=(t+1)e^{t-1}$도 기본해집합이다.

(나) $y_1(t)=t\ln t$, $y_2(t)=t^2$가 $t>0$에서 위 방정식의 기본해집합이 되도록 하는 연속함수 p,q가 존재한다.

(다) 미정계수법을 이용하여 $y''+2y'-3y=\frac{e^{-3t}}{t^3}$의 특수해를 구할 수 있다.

① (가) ② (나)

③ (다) ④ (가), (나)

⑤ (가), (나), (다)

성균관대학교

13 제1사분면에서 데카르트의 엽선 $x^3 + y^3 = 6xy$로 둘러싸인 영역의 넓이는?

① 2 ② $\dfrac{10}{3}$ ③ 4 ④ $\dfrac{11}{2}$ ⑤ 6

14 행렬 A에 대한 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(가) 특성다항식의 세 근은 모두 다르다.
(나) 행렬은 대각화 가능하다.
(다) 두 고유벡터 v_1, v_2가 일차독립이면 서로 직교한다.

① (가) ② (가), (나) ③ (가), (다) ④ (나), (다) ⑤ (가), (나), (다)

15 포물면 $z = x^2 + y^2$와 원기둥 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$의 교선 C를 위에서 내려다볼 때 반시계방향으로 돈다. 다음 선적분의 값은?

$$\int_C y\,\mathrm{d}x + 3x\,\mathrm{d}y + z^5\,\mathrm{d}z.$$

① π ② 2π ③ 4π ④ 8π ⑤ 16π

성균관대학교

16 $(0,0,0)$에서 $(1,1,0)$까지 곡선 $y=x\sqrt{x}$, $z=0$을 따라 수직 울타리를 친다. $(x,y,0)$에서의 높이가 x^3-y^2+27일 때 울타리 한쪽 면의 넓이는?

① $\frac{1}{4}\left(5\sqrt{5}-3\right)$
② $4\sqrt{13}-7$
③ $8\sqrt{3}$
④ $13\sqrt{13}-8$
⑤ 26

17 정상점 $x=0$ 근방에서 $(1+x)y''-2xy'-4y=0$의 멱급수해가 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$이다. 계수의 점화관계식은? 아래 식은 $n=0,1,2,\ldots$에 대한 것이다.

① $a_{n+2}=-\dfrac{n}{n+2}a_{n+1}+\dfrac{2}{n+1}a_n$
② $a_{n+2}=\dfrac{n+4}{n+2}a_n$
③ $a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}a_{n+1}+\dfrac{2n}{n+1}a_n$
④ $a_{n+2}=-\dfrac{n+2}{n}a_{n+1}+\dfrac{1}{n+1}a_n$
⑤ $a_{n+2}=\dfrac{n+3}{n+2}a_{n+1}+\dfrac{n}{n+3}a_n$

18 유클리드 내적공간 $\mathbb{R}^3$의 두 기저가 $v_i\cdot w_j=\delta_{ij}$ $(1\le i,j\le 3)$를 만족한다. $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(0,-2,1)$, $v_3=(0,3,1)$이고 $w_1=(a,b,c)$, $w_2=(d,e,f)$, $w_3=(g,h,i)$일 때 아래 행렬식의 값은?

$$\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}.$$

① 0
② $\frac{1}{5}$
③ $-\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{3}$
⑤ $-\frac{1}{3}$

성균관대학교

19 아래 직교좌표 적분을 구면좌표로 나타낼 때 양수 α, β, γ의 합은? φ는 양의 z축에서 재는 극각이다.

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha}\int_0^{\beta}\int_0^{\gamma} \rho^4 \sin(\varphi)^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

① $3\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{8}$ ② $5\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{8}$

③ $7\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{8}$ ④ $5\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{2}$

⑤ $7\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{2}$

20* 정칙특이점 $x=0$ 근방에서 $xy''-7y'+2024y=0\ (x>0)$의 두 일차독립인 프로베니우스 급수해의 표준 형태는? 각 급수의 첫 계수 a_0, b_0는 영이 아니며 C는 상수이다.

① $y_1=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$

② $y_1=x^8\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$

③ $y_1=x^4\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad y_2=y_1\ln x+x^3\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$

④ $y_1=x^7\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad y_2=y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$

⑤ $y_1=x^8\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad y_2=Cy_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$