광운대학교

문제편

30문항

별표 9번은 함수의 구간과 곡선 길이식, 11번은 전미분 근사, 15번은 직육면체의 방향과 양의 공간, 25번은 일변수 함수 조건을 명시한 편집 수정입니다. 원문과의 차이는 해당 해설에 설명했습니다.

01 함수 f가 a에서 미분가능하면 연속임을 보이는 다음 증명에서 $A-B+C$의 값을 구하시오. 미분가능하므로 $\lim_{h\to 0} A$가 존재한다. 항등식 $f(a+h)=f(a+h)-f(a)+f(a)$에서

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}(Bh+f(a))$$
$$=C\lim_{h\to 0} h+f(a)=f(a).$$

따라서 f는 a에서 연속이다.

① -1
② 0
③ 1
④ $f(a)$
⑤ $f'(a)$

02 $y=f(x)$, $x=g(z)$이며 f, g의 이계도함수가 존재한다. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}$를 구하시오.

① $f''(x)g'(z)+f'(x)g''(z)$
② $f''(x)(g'(z))^2+f'(x)g''(z)$
③ $f''(x)g'(z)+(f'(x))^2g''(z)$
④ $2f''(x)g'(z)+f'(x)g''(z)$
⑤ $f''(x)g'(z)+2f'(x)g''(z)$

03 두 곡선 $y^2=x^3$과 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 제1사분면 교점에서 두 접선이 수직이다. a, b의 관계로 옳은 것을 고르시오.

① $3a^2=2b^2$
② $2a^2=3b^2$
③ $a^2=b^3$
④ $3a^2=2b^3$
⑤ $2a^2=3b^3$

광운대학교

04 극곡선 $r = 1 - \cos\theta$가 x축 또는 y축과 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표와 y좌표를 모두 더하시오.

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

05 영역 $Q = \{(x, y, z) |\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$에서 다음 삼중적분을 구하시오.

$$\iiint_Q \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2}}.$$

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$
③ $\frac{\pi}{2}$ ④ π
⑤ 2π

06 매개곡선

$$x = -t^2 + t - \frac{1}{4}, \quad y = t^4 - 2t^3 + t^2 - 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

가 x축과 만나는 모든 서로 다른 점의 x좌표를 더하시오.

① $-\frac{5}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$
③ 0 ④ $\frac{3}{4}$
⑤ 1

광운대학교

07 양의 함수 f에 대해 적분으로 정의된 함수

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$$

의 성질로 옳은 것을 고르시오.

① 증가함수이며 위로 볼록하다.
② 증가함수이며 아래로 볼록하다.
③ 감소함수이며 위로 볼록하다.
④ 감소함수이며 아래로 볼록하다.
⑤ 일차함수이다.

08 다음 중 구간 I에서 리만 적분가능한 함수를 모두 고르시오.

(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $I = [0, 3]$.
(b) $f(x) = 1\ (0 < x < 1)$, $f(0) = f(1) = 0$, $I = [0, 1]$.
(c) 유리수에서 1, 무리수에서 0인 함수, $I = [0, 1]$.

① (a) ② (b)
③ (c) ④ (a), (b)
⑤ (b), (c)

09* 함수 f는 $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 이계 연속미분가능하다. 모든 $\frac{1}{2} < a < b$에 대해 $x = a$부터 $x = b$까지 곡선 $y = f(x)$의 길이가 $b^2 - a^2$이다. $f'(x)f''(x)$를 구하시오.

① x ② $2x$
③ $3x$ ④ $4x$
⑤ $5x$

광운대학교

10 포물선 $y^2 = 2x$와 직선 $y = x - 12$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

① $\frac{230}{3}$ ② 80

③ $\frac{250}{3}$ ④ $\frac{260}{3}$

⑤ 90

11* 원뿔의 밑면 반지름과 높이의 측정값은 각각 10과 25이고, 두 측정 오차의 절댓값은 각각 0.1 이하이다. 전미분으로 근사한 부피의 최대 오차를 구하시오.

① 5π ② 10π

③ 15π ④ 20π

⑤ 25π

12 초기값 문제

$$y' = x - y, \quad y(0) = 0$$

의 해를 구하시오. 변수변환 $z = x - y$를 사용할 수 있다.

① $e^{-x} + x + 1$ ② $e^{x} + x - 1$

③ $e^{-x} - x - 1$ ④ $e^{x} - x - 1$

⑤ $e^{-x} + x - 1$

광운대학교

13 $f(x,y)=\frac{x^2}{x-\sin y}$일 때

$$f_x\left(1,\frac{3\pi}{2}\right)+f_y\left(1,\frac{3\pi}{2}\right)$$

의 값을 구하시오.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{4}$ ④ 1

⑤ $\frac{5}{4}$

14 높이 함수 $h(x,y)=10000-2x^2-y^2$인 산에서 $P=(30,-20)$부터 가장 가파른 상승 방향으로 이동한다. 좌표평면에서 이동 경로의 방정식을 고르시오.

① $x=\frac{3}{80}y^2$ ② $x=\frac{3}{70}y^2$

③ $x=\frac{3}{60}y^2$ ④ $x=\frac{3}{50}y^2$

⑤ $x=\frac{3}{40}y^2$

15* 제1팔분공간에서 모든 모서리가 좌표축에 평행한 직육면체의 한 꼭짓점은 원점이고 반대 꼭짓점은 평면

$$ax+by+cz=abc,\quad a,b,c>0$$

위에 있다. 직육면체의 최대 부피를 구하시오.

① $\frac{a^2b^2c^2}{27}$ ② $\frac{a^3b^3c^3}{27}$

③ $\frac{a^2b^2c^2}{8}$ ④ $\frac{a^3b^3c^3}{8}$

⑤ $\frac{abc}{27}$

광운대학교

16 다음 극한이 $\frac{1}{8}$이 되는 자연수 n을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^n}=\frac{1}{8}.$$

① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

17 수열 (a_n)이 다음 두 부등식을 만족한다. $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하시오.

$$(4a_n-3)2^{n+1}+a_n+4>0,$$
$$2a_n\tan\frac{1}{n}+\arcsin\frac{1}{n}<\frac{5}{2}\tan\frac{1}{n}.$$

① 0 ② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{3}{4}$ ④ 1
⑤ 2

18 열린 구간 $(-\pi,\pi)$에서 방정식 $\frac{2}{3}x\sin x-1=0$의 실근 개수를 구하시오.

① 6개 ② 5개
③ 4개 ④ 3개
⑤ 2개

광운대학교

19 실수 범위에서 양변이 정의되는 값에 대해 다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

(a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(b) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

① (a) ② (a), (b)

③ (b), (c) ④ (a), (c)

⑤ (a), (b), (c)

20 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$를 이용하여 다음 중 옳은 부등식을 모두 고르시오.

(a) $e^{\pi} > \pi^{e}$.

(b) $3^{\pi} > \pi^{3}$.

(c) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

① (a) ② (a), (b)

③ (b), (c) ④ (a), (c)

⑤ (a), (b), (c)

21 $a > 1$일 때 $f(x) = \frac{x^3+k}{a^x}$가 극값을 세 개 갖게 하는 k의 범위를 고르시오.

① $(0, 1)$ ② $\left(0, \frac{2}{\ln a}\right)$

③ $\left(\frac{2}{\ln a}, 0\right)$ ④ $\left(0, \frac{4}{(\ln a)^3}\right)$

⑤ $\left(1, \frac{4}{(\ln a)^3}\right)$

광운대학교

22 $f(x)=\sinh x$, $g(x)=x\ln(1+x)$일 때 $\frac{(f+g)^{(2020)}(0)}{2020!}$을 구하시오.

① $-\frac{1}{2019}$ ② $\frac{1}{2019}$

③ $-\frac{1}{2020}$ ④ $\frac{1}{2020}$

⑤ $\frac{2019}{2020}$

23 다음 진술 중 옳은 것의 개수를 고르시오.

(a) $a_n \to 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

(b) $\sum_{n=100}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=100}^{\infty} a_n+\sum_{n=100}^{\infty} b_n$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$는 $p\geq 1$에서 수렴하고 $0<p<1$에서 발산한다.

(d) 모든 n에 대해 $a_n \leq b_n$이고 $\sum a_n$이 발산하면 $\sum b_n$도 발산한다.

(e) 절대수렴급수의 임의의 재배열은 절대수렴한다.

① 5개 ② 4개

③ 3개 ④ 2개

⑤ 1개

24 두 직선 $x=-y=z+1$과 $x=y=-z$ 사이의 최단거리를 구하시오.

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$

⑤ $3\sqrt{2}$

광운대학교

25* 일변수 함수 f는 연속미분가능하고 $a > 0$이다. 다음 식을 만족하는 A를 구하시오.

$$\iint_{\Omega} f'(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi A,$$
$$\Omega = \{(x,y) |\ x^2+y^2 \le a^2\}.$$

① $f(a^2)-f(0)$ ② $f(a)-f(0)$
③ $f(0)-f(a)$ ④ $f(0)-f(a^2)$
⑤ $f(0)$

26 $a > 0$일 때 곡면 $z^2 = 4ax$와 원기둥 $y^2 = ax - x^2$로 둘러싸인 영역의 부피를 구하시오.

① $\dfrac{32a^3}{15}$ ② $2a^3$
③ $\dfrac{32a^3}{17}$ ④ $\dfrac{16a^3}{9}$
⑤ $\dfrac{32a^3}{19}$

27 다음 급수 중 발산하는 것의 개수를 구하시오.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n-1}}$.
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+x^n}$, $0 < x < 1$.
(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

① 0개 ② 1개
③ 2개 ④ 3개
⑤ 4개

광운대학교

28 두 곡선

$$\boldsymbol{x}_1(t) = (t, 1-t, 3+t^2),$$
$$\boldsymbol{x}_2(s) = (3-s, s-2, s^2)$$

이 만나는 점에서 두 접선의 교각을 구하시오.

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$

③ $\dfrac{\pi}{4}$ ④ $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

⑤ $\dfrac{\pi}{6}$

29 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$에서 F는 기함수이다. 꼭짓점이 $(1,0), (2,0), (0,2), (0,1)$인 사각형의 내부 Ω에 대해

$$\iint_{\Omega} f\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\mathrm{d}A$$

를 구하시오.

① $\dfrac{F(1)}{2}$ ② $F(1)$

③ $\dfrac{3F(1)}{2}$ ④ $2F(1)$

⑤ $\dfrac{5F(1)}{2}$

30 함수

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

의 원점에서 성질로 옳은 것을 고르시오.

① 연속이고 편미분가능하다.
② 연속이고 미분가능하다.
③ 불연속이고 편미분가능하다.
④ 불연속이고 미분가능하다.
⑤ 편미분불가능하고 미분불가능하다.