이화여자대학교

문제편

30문항

문항·선택지·공통 보기의 값을 원문과 대조했으며, 25번 그림은 같은 곡선과 방향으로 다시 그렸습니다.

01 행렬 A와 열벡터 x가 아래와 같다. $\lim_{n\to\infty} A^n x$는?

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{5}{10}\\ \frac{9}{10} & \frac{5}{10}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

① $\begin{pmatrix}\frac{21}{20}\\ \frac{49}{20}\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}\frac{10}{37}\\ \frac{5}{17}\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}\frac{1}{20}\\ \frac{47}{20}\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}\frac{101}{314}\\ \frac{17}{314}\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}\frac{15}{14}\\ \frac{27}{14}\end{pmatrix}$

02 이차곡선 $13x^2-10xy+13y^2=18$과 합동인 곡선의 방정식은?

① $x^2+y^2=\dfrac{18}{13}$ ② $xy=\dfrac{18}{130}$

③ $9x^2+4y^2=9$ ④ $x^2-y^2=\dfrac{9}{5}$

⑤ $x^2+\dfrac{13}{10}xy+y^2=1$

03 $\mathbb{R}^3$의 두 기저 B_1, B_2가 아래와 같다. B_1 좌표를 B_2 좌표로 변환하는 행렬은?

$$B_1=((0,1,2),(-1,1,0),(1,3,4)),$$
$$B_2=((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)).$$

① $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & 3\\ \frac{1}{2} & -1 & 1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{4}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

이화여자대학교

04 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$이고 x는 영벡터가 아닌 실수 열벡터이다. $\frac{x\cdot(Ax)}{x\cdot x}$의 최솟값은?

① $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ ② 6 ③ 5

④ 1 ⑤ $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

05 3차원 벡터 u, v, w에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르시오. $\cdot$는 내적, $\times$는 외적이며 $\|u\|$는 벡터 u의 노름이다.

a. 실수 k에 대해 $\|ku\| = k\|u\|$이다.
b. $\|u\| = 1$이면 $\mathrm{proj}_u\, v = (v\cdot u)u$이다.
c. $u \perp v$이면 $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|$이다.
d. $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$이다.

① a, b ② a, c
③ a, d ④ b, c
⑤ b, d

06 $n \times n$ 행렬 A, B에 대한 설명 중 참인 것을 모두 고르시오. A^T는 전치행렬이다.

a. A가 기본행렬이면 $\det A = \pm 1$이다.
b. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$이다.
c. A가 가역일 필요충분조건은 $\det A = 0$이다.
d. $\mathrm{rank}(A) = n$일 필요충분조건은 $\det A \neq 0$이다.
e. $\det(A^T) = -\det A$이다.

① a, b ② a, c, d
③ a, c ④ b, c, d
⑤ b, d

이화여자대학교

07 곡선 $x^2 - y = 2$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 영역을 $x = -1$을 축으로 회전시킨 입체의 부피는?

① 13π ② $27\dfrac{\pi}{2}$ ③ 14π ④ $29\dfrac{\pi}{2}$ ⑤ 15π

08 행렬 A의 고윳값을 λ, 그 고유벡터를 V라 한다. $AP - \lambda P = V$를 만족하는 열벡터 P에 대해 $\|P\|^2$의 최솟값은? 단, $V \cdot (0,1)^T = 2$이다.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

① $\dfrac{1}{13}$ ② $\dfrac{1}{9}$ ③ $\dfrac{1}{7}$ ④ $\dfrac{13}{21}$ ⑤ $\dfrac{2}{7}$

09 $\nabla f(x_i, y_i) = (0,0)$인 다섯 점에서 헤시안 행렬이 아래 순서로 주어진다. 극소점의 개수는?

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\quad H_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$H_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad H_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$H_5 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

이화여자대학교

10 급수 $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$의 합을 포함하는 구간은? 힌트: $\int_3^\infty x^{-3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{18}$.

① $\left[\frac{247}{216},\frac{255}{216}\right]$
② $\left[\frac{255}{216},\frac{263}{216}\right]$
③ $\left[\frac{263}{216},\frac{271}{216}\right]$
④ $\left[\frac{271}{216},\frac{278}{216}\right]$
⑤ $\left[\frac{278}{216},\frac{280}{216}\right]$

11 아래 각 줄에서 a f는 해당 줄의 등호를 가리킨다. 통상적인 급수의 합을 기준으로 틀린 등호를 모두 고르시오.

a. $0=0+0+0+\ldots$
b. $=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$
c. $=1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\ldots$
d. $=1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$
e. $=1+0+0+0+\ldots$
f. $=1$

① b, c, d
② b, c
③ c, d
④ a, e, f
⑤ b, d

12 $x_1=1$, $x_{n+1}=3-\frac{1}{x_n}$ $(n\geq 1)$로 정의한 수열의 극한은?

① $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
② -1
③ 1
④ 3
⑤ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

이화여자대학교

13 $\lim_{x\to 0}\left(e^{x-\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$의 값은?

① $e^{\frac{1}{6}}$ ② $e^{\frac{1}{3}}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

14 아래 함수에 대해 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

$$f(x)=\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3}+\ldots+\frac{\sin^{2024} x}{2024}.$$

① $\dfrac{2^{506}-1}{2^{506}\left(\sqrt{2}-1\right)}$

② $\dfrac{2^{1012}-1}{2^{1012}\left(\sqrt{2}-1\right)}$

③ $\dfrac{2^{2024}-1}{2^{2024}\left(\sqrt{2}-1\right)}$

④ $\dfrac{2^{1012}-1}{2^{1012}\left(\sqrt{3}-1\right)}$

⑤ $\dfrac{2^{2024}-1}{2^{2024}\left(\sqrt{3}-1\right)}$

15 다음 특이적분 중 수렴하는 것을 모두 고르시오.

a. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_1^{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\arctan(e^x)}{2+e^x}\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

① a, b
② a, c
③ a, d
④ b, c
⑤ b, d

이화여자대학교

16 다음 급수 중 수렴하는 것을 모두 고르시오.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n n!}{5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}$

① a, b ② a, c
③ a, d ④ b, c
⑤ b, d

17 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르시오.

a. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

b. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) = 0$이다.

c. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$이고 f가 L에서 연속이면 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$이다.

d. 위로 유계인 단조수열은 수렴한다.

① a, b ② a, c
③ a, d ④ b, c
⑤ b, d

18 유한차원 내적공간 V의 선형연산자 T에 대한 다음 명제 중 나머지 네 명제와 동치가 아닌 것은? T^*는 수반연산자, I는 항등연산자이다.

a. $T^*T = TT^* = I$

b. 모든 $x, y \in V$에 대해 $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$이다.

c. T의 모든 고윳값은 1이다.

d. 모든 $x \in V$에 대해 $\|T(x)\| = \|x\|$이다.

e. V의 정규직교기저 β에 대해 $T(\beta)$도 정규직교기저이다.

① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

이화여자대학교

21~30번 공통 보기

21~30번은 아래 공통 보기에서 답을 고르시오. 같은 보기를 여러 문항에 중복 사용할 수 있습니다.

①	-55	②	0	③	1	④	3	⑤	4
⑥	9	⑦	13	⑧	20	⑨	23	⑩	50
⑪	$\frac{1}{2}$	⑫	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	⑬	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	⑭	$\frac{\pi}{4}$	⑮	$4\frac{\pi}{3}$
⑯	$\frac{\pi}{2}$	⑰	π	⑱	$3\frac{\pi}{2}$	⑲	2π	⑳	4π

19 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$의 합은?

① $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ② $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

20 실수 성분 3×3 행렬 A와 $\mathbb{R}^3$의 기저 v_1, v_2, v_3가 아래 조건을 만족한다. $\det A$의 값은? I는 단위행렬이다.

$$(A-2I)v_1 = (A+2I)v_2 = (A-4I)v_3 = 0.$$

① -16 ② -8 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

21 아래 행렬 A와 서로 수직인 단위 열벡터 u_1, u_2, u_3가 다음 식을 만족한다. 세 실수 a_1, a_2, a_3의 곱은?

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A = a_1 u_1 u_1^T + a_2 u_2 u_2^T + a_3 u_3 u_3^T.$$

공통 보기 번호: _____

이화여자대학교

22 아래 10×10 행렬 A에 대해 $\mathrm{tr}(A^T A)$를 100으로 나눈 나머지는?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 10 \\ 11 & 12 & \cdots & 20 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 91 & 92 & \cdots & 100 \end{pmatrix}.$$

공통 보기 번호: _____

23 영역 D는 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$로 주어진다. 다음 이중적분의 값은?

$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

공통 보기 번호: _____

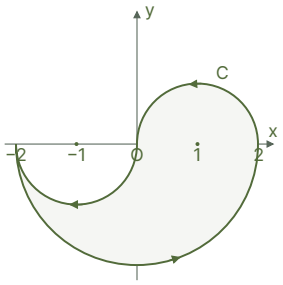
24 S는 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$인 반구면이다. n은 바깥쪽 단위법선으로 $n \cdot (0,0,1) \ge 0$이다. 다음 벡터장에 대한 적분값은?

$$F = \frac{(x, x, \sin z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot n\,\mathrm{d}S.$$

공통 보기 번호: _____

이화여자대학교

25 그림의 C는 $(1,0),(-1,0),(0,0)$을 중심으로 하는 세 반원을 이은 폐곡선이다. 그림의 방향으로 $F=(y\cos(xy)-y, x\cos(xy)+x)$에 대해 $\int_C F\cdot T\,ds$의 값은? T는 단위접선벡터이다.



공통 보기 번호: _____

26 양의 실수 전체에서 미분 가능한 f가 $f(x)+xf'(x)=x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}$를 만족한다. $4f(4)-f(1)$의 값은?

공통 보기 번호: _____

27 원점에서 $i+j-k$, $i-j+k$, $-i+j+k$를 세 변으로 갖는 평행육면체의 부피는? i,j,k는 표준 단위벡터이다.

공통 보기 번호: _____

이화여자대학교

28 $f(x) = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$이다. 다음 적분값은?

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))}\,\mathrm{d}x.$$

공통 보기 번호: _____

29 모든 실수에서 f, g가 다음과 같이 정의된다. $g''(\frac{\pi}{4})$의 값은?

$$f(x) = \int_{0}^{\sin x} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$g(x) = \int_{10}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

공통 보기 번호: _____

30 평면 $3x - y + z = 5$와 원기둥 $x^2 + y^2 = 2$의 교선 위에서 $f(x, y, z) = x + y + z$의 최댓값은?
공통 보기 번호: _____