한양대학교

문제편

25문항

원문의 수학 36–60번을 1–25번으로 재번호화했습니다. 마지막 5문항은 주관식입니다. 별표 문항은 기존 해설의 답을 유일하게 정하도록 조건을 편집 보완했으며, 해설에 원래 조건의 한계도 설명했습니다.

01 다음 등식에서 a^2은?

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec x\tan x\,\mathrm{d}x = a\pi - \ln\left|\sqrt{2}+1\right|.$$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{16}$

⑤ $\frac{1}{32}$

02 멱급수 전개 $x\cos(2x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n$에서 $a_1+6a_3=\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{3}}{B}\pi$일 때 $A+B$는? 단, A, B는 정수이다.

① -9 ② -3

③ 0 ④ 1

⑤ 5

03 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$가 나타내는 곡선을 C라 하자. f의 임계수에서 C의 곡률은?

① $3\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$

③ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$

⑤ $3\sqrt{2}$

한양대학교

04 함수 $f(x,y)=-3x^2+7xy+3y^2-2y^3$의 모든 임계점에서 $\left|f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right|$ 값들의 합은?

① 88 ② 98
③ 110 ④ 160
⑤ 170

05 변수들이 $x=u\sin v\cos w$, $y=u\sin v\sin w$, $z=u\cos v$를 만족한다. $(x,y,z)=\left(\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$에서 야코비 행렬식 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$의 절댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{16}$
⑤ $\frac{1}{32}$

06 곡면 $z=x^2+y^2$ 위의 점 $(1,1,2)$에서 접평면이 $ax+by+cz=2$일 때 $a+b+c$는?

① 2 ② 3
③ 4 ④ 5
⑤ 6

한양대학교

07 곡선 C가 $r(t) = (t^3 - 2t, t^3 + 2t)$, $0 \le t \le 1$로 주어질 때 벡터장 $F(x, y) = (6xy + e^x, 3x^2)$의 선적분 $\int_C F \cdot \mathrm{d}r$ 값에 가장 가까운 정수는?

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

08 정적분 $\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, \mathrm{d}\theta$의 값에 가장 가까운 정수는?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

09 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. 벡터공간 V의 부분공간 U_1, U_2, W_1, W_2가 $U_1 \subseteq W_1$, $U_2 \subseteq W_2$, $U_1 \oplus U_2 = W_1 \oplus W_2$를 만족하면 $U_1 = W_1$, $U_2 = W_2$이다.

ㄴ. 행렬 A가 다음 B와 행 동등이면 A의 2·3·4·5열은 열공간의 기저이다.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

ㄷ. 선형변환 $T : V \to V$에 대해 $V = \ker T \oplus \mathrm{Im}\ T$이다.

ㄹ. 3×3 행렬 A의 고윳값이 $1, 2, 3$이면 A는 가역이고, 역행렬의 고윳값은 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ ② ㄱ, ㄴ, ㄷ
③ ㄱ, ㄴ, ㄹ ④ ㄱ, ㄷ, ㄹ
⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

한양대학교

10 선형변환 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$의 순서기저

$$\{(0,1,1),(0,1,0),(1,1,0)\}$$

에 대한 행렬표현이 $\begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$이다. $T(3,3,1)=(p,q,r)$일 때 $|p|+|q|+|r|$는?

① 7 ② 9
③ 11 ④ 13
⑤ 15

11 행렬 A와

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

가 $B=P^{-1}AP$를 만족한다. A의 고윳값 2에 대응하는 고유벡터가 $(a,b,1,c)$일 때 $a^2+b^2+c^2$는?

① 1 ② 5
③ 13 ④ 21
⑤ 29

12 $(1,1,0,0)$과 $(1,1,1,0)$이 생성하는 $\mathbb{R}^4$의 부분공간을 W라 하자. $(4,3,2,1)$의 $W^{\perp}$ 위 정사영이 (a,b,c,d)일 때 $10(a^2+b^2+c^2+d^2)$는?

① 5 ② 10
③ 15 ④ 20
⑤ 25

한양대학교

13 5×5 실수행렬 A는 $A^4 - 4A^3 + 5A^2 - 8A + 6I = 0$을 만족한다. A와 A^2은 각각 항등행렬의 상수배가 아니며 $A - 3I$는 가역이다. A의 최소다항식을 $m(x)$라 할 때 $m(3)$은?

① 16
② 18
③ 20
④ 22
⑤ 24

14 5×5 실수행렬 A는 $A^4 - 4A^3 + 5A^2 - 8A + 6I = 0$을 만족한다. A와 A^2은 각각 항등행렬의 상수배가 아니며 $A - 3I$는 가역이다. 고유공간 $E(1) = \{v \in \mathbb{R}^5 \mid (A - I)v = 0\}$의 차원이 1보다 클 때, A의 특성다항식 $f(x)$에 대해 $f(2)$는?

① 6
② 8
③ 10
④ 12
⑤ 14

15 미분방정식 $\frac{dy}{dx} = 4 + 6x + 2y + 3xy$의 해가 $y(0) = 3$을 만족할 때 $y(1)$은?

① $4e^{\frac{7}{2}} - 1$
② $5e^{\frac{7}{2}} - 2$
③ $6e^{\frac{7}{2}} - 3$
④ $4e^{\frac{8}{2}} - 1$
⑤ $5e^{\frac{8}{2}} - 1$

한양대학교

16 미분방정식 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x + \frac{y^2}{x}$의 해가 $y(1) = 5$를 만족할 때 $y(e)$는?

① $\sqrt{21}e$ ② $\sqrt{23}e$

③ $\sqrt{26}e$ ④ $\sqrt{29}e$

⑤ $\sqrt{31}e$

17* 미분방정식 $(x-1)^2y'' - 3(x-1)y' + 3y = 0$의 해가 $y(2) = 1$, $y(3) = 14$를 만족한다. 해 y는 전구간에서 하나의 다항식으로 주어진다고 할 때 $y(0) + y(4)$는?

① 33 ② 40

③ 43 ④ 50

⑤ 53

18* 미분방정식 $y'' + 24y = \cos(7t) - \sin(7t)$의 특수해 $y_p = A\cos(7t - \alpha)$에 대해 $A + \alpha$는? 단, $-\pi < \alpha \leq \pi$이고 $A < 0$이다.

① $-\frac{\sqrt{2}}{25} - \frac{\pi}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{25} + \frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{25} - \frac{\pi}{4}$ ④ $-\frac{\sqrt{7}}{25} + \frac{\pi}{4}$

⑤ $\frac{\sqrt{7}}{25} + \frac{\pi}{4}$

한양대학교

19 2계 선형 미분방정식 $L[y] = f(x)$의 세 해가

$$y_1(x) = 2e^x + e^{x^2}, \quad y_2(x) = 3e^x + e^{x^2},$$
$$y_3(x) = 4e^x + e^{x^2} + 5e^{-x^3}$$

이다. 같은 방정식에서 $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$인 해에 대해 $y(1) + y(-1)$은?

① $-2e - 4e^{-1}$ ② $-2e - 3e^{-1}$

③ $-2e - e^{-1}$ ④ $-e - 3e^{-1}$

⑤ $-e - 2e^{-1}$

20 미분방정식 $y'' - 4y = t + te^t$의 해가 $y(0) = -\frac{2}{9}$, $y'(0) = \frac{4}{9}$를 만족할 때 $y(1)$은?

① $\frac{3}{16}(e^2 - e^{-2}) - \frac{4}{9}e - \frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}(e^2 - e^{-2}) - \frac{4}{9}e - \frac{1}{4}$

③ $\frac{5}{16}(e^2 - e^{-2}) - \frac{5}{9}e - \frac{1}{4}$ ④ $\frac{7}{16}(e^2 - e^{-2}) - \frac{4}{9}e - \frac{1}{4}$

⑤ $\frac{7}{16}(e^2 - e^{-2}) - \frac{5}{9}e - \frac{1}{4}$

21 [주관식] 곡선 $r(t) = (\cos t, \sin t, 4 - \cos t)$와 벡터장 $F = (y^6, x^5, z^3)$에 대해 $\int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b}{a}\pi$이다. 서로소인 자연수 a, b의 합을 구하시오.

답: _____

한양대학교

22 [주관식] 구면 $x^2+y^2+z^2=1$을 통과하는 벡터장 $F=(2x^3+y, 2y^3, e^x+2z^3)$의 바깥쪽 유량이 $\frac{b}{a}\pi$이다. 서로소인 자연수 a, b의 합을 구하시오.

답: _____

23 [주관식] 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & -8 & 14 \end{pmatrix}$에 대해 $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\ A)$의 행렬식을 구하시오. 단, $\mathrm{adj}\ B$는 행렬 B의 여인자 행렬을 전치한 수반행렬이다.

답: _____

24 [주관식] 타원 $4x^2-2\sqrt{2}xy+3y^2-20=0$의 장축 길이를 a, 단축 길이를 b라 할 때 a^2+b^2을 구하시오.

답: _____

한양대학교

25 [주관식] $y''' - 7y' + 6y = 0$의 해가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$을 만족한다. $Y(t) = (y(t), y'(t), y''(t))^T$에 대해 $Y' = AY$라 할 때

$$20y(1)\det A = pe + qe^2 + re^{-3}$$

이다. 정수 p, q, r에 대해 $|p + q + r|$을 구하시오.

답: _____