중앙대학교

문제편

30문항 · 60분

01 극한 $\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\sin x}+3x\right)^{\frac{1}{\tan x}}$의 값은?

① 1
② e
③ e^4
④ ∞

02 함수 $f(x)=-(e^x+e^{-x})^3+6(e^x+e^{-x})^2+15(e^x+e^{-x})$가 최댓값을 갖는 x를 $\alpha, \beta\ (\alpha>\beta)$라 할 때, $e^{2\alpha}+e^{2\beta}$의 값은?

① 2
② 14
③ 23
④ 34

03 아래 이중적분의 값은?

$$\int_0^1\int_x^1 x^{2022}\sqrt{1+y^{2024}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

① $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2024\cdot 3036}$
② $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2023\cdot 3036}$
③ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2024\cdot 3036}$
④ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2023\cdot 3036}$

중앙대학교

04 아래 보기의 급수 중 수렴하는 것의 개수는?

(가)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n+1))^2}$$

(나)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

(다)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$$

(라)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)}$$

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4

05 $f(x)=e^x(\cos 2x+\sin 2x)$를 $x=0$에서 테일러 전개했을 때, x^5의 계수를 a_5라 하자. $5!\cdot a_5$의 값은?

① 3 ② 5
③ 7 ④ 9

06 두 곡선 $y^3=x^2$과 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 교점에서 각 곡선의 접선이 서로 수직이 되는 a, b의 일반적인 관계식은?

① $3b^2=2a^2$ ② $2b^3=3a^2$
③ $3b^2=2a^3$ ④ $2b^2=3a^2$

중앙대학교

07 $\arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)=\theta_1$, $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\theta_2$일 때, $\theta_1+\theta_2$의 값은? (단, $-\frac{\pi}{2}\le\theta_1,\theta_2\le\frac{\pi}{2}$이다.)

① $-\frac{\pi}{2}$ ② 0
③ $\frac{\pi}{2}$ ④ π

08 $f(x)=\lfloor 2\cos x-\cos 2x\rfloor$에 대하여 $0<x<3\pi$에서 불연속인 점의 개수는? (단, $\lfloor x\rfloor$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 10 ② 11
③ 12 ④ 13

09 아래 두 함수에 대하여 합성함수 $h(x,y)=f(g(x,y))$의 $\mathbb{R}^2$에서의 두 임계점을 $(a,b),(c,d)$라 하자. $a+b+c+d$의 값은? (단, 두 점은 서로 다르다.)

$$f(z)=\tanh z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}},$$
$$g(x,y)=x^3-12xy+8y^3.$$

① -3 ② -2
③ 2 ④ 3

중앙대학교

10 아래 벡터장을 주어진 곡선 C를 따라 적분한 선적분 $\int_C F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$의 값은?

$$F(x,y,z) = (y\cos z - yze^x,\\ x\cos z - ze^x, -xy\sin z - ye^x),$$
$$C : \boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

① $-\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$
② $-\frac{\pi}{2}$
③ $-\pi$
④ $-\pi e^{\frac{\pi}{2}}$

11 아래 함수에 대하여 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$의 값은?

$$f(x,y) = \int_{2x+4y}^{3y^2} \frac{1}{1+e^{-u}}\,\mathrm{d}u.$$

① -2
② 2
③ -3
④ 3

12 $f(x,y,z) = xe^{-y-z}\cos(xy)$가 $(1,0,1)$에서 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터는?

① $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
② $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
③ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
④ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

중앙대학교

13 $y=\sin(\pi\frac{x}{2})\ (0\le x\le 1)$의 그래프와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이는?

① $\frac{4}{\pi}+1$ ② $\frac{4}{\pi}-1$

③ $\frac{6}{\pi}+1$ ④ $\frac{6}{\pi}-1$

14 부정적분 $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$를 구하면?

① $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{3}{\cos x}-3\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$

② $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{3}{\sin x}-3\sin x+\frac{\sin^3 x}{3}+C$

③ $\frac{3}{\cos^3 x}-\frac{1}{3\cos x}-\frac{\cos x}{3}+3\cos^3 x+C$

④ $\frac{3}{\sin^3 x}-\frac{1}{3\sin x}-\frac{\sin x}{3}+3\sin^3 x+C$

15 아래 보기 중 두 개를 더했을 때 유리함수로 표현할 수 있는 것은? (유리함수는 분자와 분모가 다항식인 함수이다.)

(가) $$\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

(나) $$\int \frac{2}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

(다) $$\int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

(라) $$\int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

① (가)+(나) ② (나)+(다)

③ (가)+(라) ④ (나)+(라)

중앙대학교

16 아래 식을 성립하게 하는 실수 a의 값은?

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+2a}\right)^{x}=e^{4}.$$

① $\frac{2}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$

③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{4}{3}$

17 아래 선형사상 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$의 치역은 평면을 이룬다. 이 평면 위에서 $(1,2,3)$과 가장 가까운 점을 (a,b,c)라 할 때, $a+b+c$의 값은?

$$Tv=Av,\quad A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\-1&4&-1\end{pmatrix},\quad v\in\mathbb{R}^3.$$

① 6 ② $\frac{64}{11}$

③ $\frac{60}{11}$ ④ $\frac{58}{11}$

18 아래 행렬의 계수가 2가 되는 실수 x를 모두 구하면?

$$A=\begin{pmatrix}1&x&x\\x&x&1\\x&1&x\end{pmatrix}.$$

① $-\frac{1}{2},1$ ② $0,1$

③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0

중앙대학교

19 평면 $x+y+z=1$과 구면 $x^2+y^2+(z+1)^2=4$의 교집합을 원 C라 하자. 원 C의 내부를 밑면으로 하고, 구면 위의 점 P를 꼭짓점으로 하는 원뿔의 부피 중 최댓값은?

① $\frac{16}{9}\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
② $\frac{4}{3}\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
③ $\frac{8}{9}\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
④ $\frac{8}{3}\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

20 두 평면 $z=0$, $z=1$과 원기둥 $x^2+y^2=9$로 둘러싸인 영역의 경계가 S이다. 아래 벡터장의 바깥쪽 유량 $\int_S F\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$의 값은?

$$F(x,y,z)=(x(x^2+y^2+z^2)+e^{-yz},\\ y(x^2+y^2+z^2)+e^{-zx},\\ z(x^2+y^2+z^2)+e^{-xy}).$$

① $345\frac{\pi}{2}$
② $435\frac{\pi}{2}$
③ $525\frac{\pi}{4}$
④ $405\frac{\pi}{4}$

21 $f(x)=x^3e^x$에 대하여 정수 $n\geq 3$일 때 $f^{(n)}(1)$의 값은?

① $e(n^2+n+1)$
② $e(n^3+n+1)$
③ $e(n^2+2n+1)$
④ $e(n^3+2n+1)$

중앙대학교

22 $0 \le t \le \pi$일 때 평면 위의 점 $P(\sin^2 t, \cos t \sin t)$의 자취는 어떤 원 위에 있는가?

① 중심 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 반지름 $\frac{1}{2}$
② 중심 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 반지름 $\frac{1}{2}$
③ 중심 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 반지름 1
④ 중심 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 반지름 1

23 $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-5}$가 $x = a$에서 극댓값, $x = b$에서 극솟값을 가질 때, $2a^2 + b^2$의 값은?

① 72 ② 114
③ 132 ④ 153

24 아래 행렬 A와 어떤 가역행렬 B가 주어진 식을 만족할 때, $a + b + c$의 값은?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

① 0 ② 2
③ 3 ④ 5

중앙대학교

25 타원면 $x^2+2y^2+z^2=1$ 위에서 $f(x,y,z)=xy+z^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 a, b라 할 때, a^2+b^2의 값은?

① 1
② $\sqrt{\frac{3}{2}}+1$
③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{5}{4}$

26 아래 행렬 A와 B에 대하여 대각합 $\mathrm{tr}\,B$의 값은?

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&2\\-3&-1&5\end{pmatrix},$$
$$B=A^{2024}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

① $1+2^{2024}+2\cdot 3^{2024}$
② $1+3^{2024}$
③ $1+2^{2024}$
④ $1+2\cdot 3^{2024}$

27 아래 4×4 행렬에 대하여 $\det(A^4-3A^3+A^2)$의 값은?

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&0&2&1\\0&0&1&0\\0&1&2&0\end{pmatrix}.$$

① -20
② -10
③ 0
④ 10

중앙대학교

28 아래 식에서 $a+b$의 값은?

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

① 3^{10}
② $2 \cdot 3^{10}$
③ 3^{11}
④ $4 \cdot 3^{10}$

29 행렬 A의 역행렬이 아래와 같고 $BA = A^2 + A$일 때, $\det B$의 값은?

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

① 0
② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{4}{3}$
④ 2

30 $A^T = A^T A$, $A \neq O$일 때 아래 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? (단, A^T는 전치행렬, O는 영행렬이다.)

(가) $A = A^T$
(나) $A = A^{-1}$
(다) $A^2 = A$
(라) $\det A = -1$

① (가), (나)
② (나), (다)
③ (가), (다)
④ (가), (다), (라)