서울시립대학교

문제편

30문항 · 90분

01 $\operatorname{sech} x = \frac{2}{3}$일 때 $\tanh x$의 값은? 단, $x > 0$이다.

① $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

02 곡선 $\ln(x^2+y^2) - xy^2 = 0$ 위의 점 $(0,1)$에서 접선의 기울기는?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$

③ 0 ④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{3}{2}$

03 곡선 $x = 2e^{\cos t}$, $y = e^{\sin(3t)}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$가 수평접선을 가지는 t의 값은?

① $\frac{11\pi}{12}$ ② $\frac{5\pi}{6}$

③ $\frac{3\pi}{4}$ ④ $\frac{2\pi}{3}$

⑤ $\frac{7\pi}{12}$

서울시립대학교

04 다음 급수가 주어진 조건을 만족할 때 $a+10b$의 값은?

$$\text{(가)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{6^{2n-1}(2n+1)!}=a$$

$$\text{(나)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+5}(3x-1)^n}{21^n\ln n}$$

(나)의 x에 대한 수렴반지름은 b이다.

① 78 ② 88
③ 92 ④ 96
⑤ 98

05 정적분 $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$
③ $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ④ $\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$
⑤ $\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

06 점 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$에서 함수 $f(x,y)=\frac{1}{4}-x^2y\cos(\pi x+\pi y)$의 선형화를 $L(x,y)=ax+by+c$라 할 때 $a+b+c$의 값은?

① $\frac{1-\pi}{8}$ ② $\frac{1-\pi}{4}$
③ $\frac{1-\pi}{2}$ ④ $\frac{1+\pi}{4}$
⑤ $\frac{1+\pi}{8}$

서울시립대학교

07 극한 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x^2}\sin\left(\frac{t^2}{3}\right)\mathrm{d}t}{x^6}$의 값은?

① 0
② $\dfrac{2}{3}$
③ $\dfrac{8}{9}$
④ $\dfrac{8}{3}$
⑤ ∞

08 정적분 $\int_0^{\sqrt{3}} 2x\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x$의 값은?

① $\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$
② $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
③ $\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$
④ $\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$
⑤ $\dfrac{5\pi}{3}-\sqrt{3}$

09 곡선 $x=3+2t^{\frac{3}{2}}$, $y=3t$, $0\le t\le 3$의 호의 길이는?

① 14
② 15
③ 16
④ 17
⑤ 18

서울시립대학교

10 직선 l과 평면 P가 다음과 같다. 조건을 만족하는 평면 $Q : ax + by + cz = 1$에서 $a + b + c$의 값은?

$$l : 4 - x = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}, \quad P : 3x + y - 2z = 3.$$

(가) 평면 Q의 방정식은 $ax + by + cz = 1$이다.
(나) 평면 Q는 직선 l을 포함한다.
(다) 평면 Q는 평면 P에 수직이다.

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$
③ 0 ④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{1}{4}$

11 C가 점 $\left(1, e, \frac{1}{e}\right)$에서 $(e, 1, 0)$까지의 선분일 때 다음 벡터장의 선적분 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$의 값은?

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(\frac{y^3}{x} - 2xyz, 3y^2 \ln x - x^2 z, -x^2 y\right).$$

① -2 ② -1
③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$
⑤ 2

12 함수 $f(x, y) = e^{\sqrt{x}} \ln(y^2 + 1)$이고 $2x - y = s$, $x + y = t$라 하자. $s = 1$, $t = 2$일 때 편도함수 $\frac{\partial f}{\partial t}$의 값은?

① $\frac{e}{6}(\ln 2 - 4)$ ② $\frac{e}{6}(\ln 2 + 4)$
③ $\frac{e}{3}(\ln 2 - 2)$ ④ $\frac{e}{3}(\ln 2 + 2)$
⑤ $\frac{e}{3}(\ln 2 + 4)$

서울시립대학교

13 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2$로 둘러싸인 영역을 직선 $x=2$를 축으로 회전시켜 얻는 입체의 부피는?

① $\dfrac{16\pi}{3}$ ② $\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

③ $\dfrac{32\pi}{3}$ ④ $\dfrac{32\sqrt{2}\pi}{3}$

⑤ $4\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$

14 함수 f, g가 다음을 만족한다. 점 $(1,2,1)$에서 벡터 $\boldsymbol{u}=\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 방향에 대한 함수 fg의 방향도함수의 값은?

(가) $f(x,y,z)=x+y^2+z-6$

(나) $g(x,y,z)$는 미분 가능한 함수이다.

(다) $g(1,2,1)=2$

① $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ② 5

③ $5\sqrt{2}$ ④ $10\sqrt{2}$

⑤ 15

15 원기둥 $x^2+y^2=1,\ z\geq 0$과 두 평면 $z=\sqrt{3}y,\ z=0$으로 둘러싸인 입체의 겉넓이는?

① $\dfrac{\pi}{2}+2\sqrt{3}$ ② $\pi+\sqrt{3}$

③ $\pi+2\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{3\pi}{2}+\sqrt{3}$

⑤ $\dfrac{3\pi}{2}+2\sqrt{3}$

서울시립대학교

16 벡터장 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(2xz,4xy,-z^2)$이고 S는 두 곡면 $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$와 두 평면 $z=0$, $z=1-y$로 유계된 영역의 경계면이다. 면적분 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$의 값은?

① $\dfrac{1}{16}$
② $\dfrac{1}{32}$
③ 0
④ $-\dfrac{1}{32}$
⑤ $-\dfrac{1}{16}$

17 다음 반복적분의 값은?

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

① $\dfrac{\pi}{8}(e^4-e^2)$
② $\dfrac{\pi}{8}(e^4-e)$
③ $\dfrac{\pi}{6}(e^4-e^2)$
④ $\dfrac{\pi}{6}(e^4-e)$
⑤ $\dfrac{\pi}{4}(e^4-e^2)$

18 행렬 A의 역행렬을 다음과 같이 쓸 때 $b+d+f+h$의 값은?

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\4&2&1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}.$$

① -2
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

서울시립대학교

19 다음 행렬에 대하여 옳은 것을 모두 고르시오.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(가) A는 서로 다른 세 개의 고윳값을 갖는다.
(나) A는 대각화 가능하다.
(다) A는 가역행렬이다.
(라) 고유공간들 차원의 합은 3이다.

① (가)
② (나), (다)
③ (가), (나), (다)
④ (나), (다), (라)
⑤ (가), (나), (다), (라)

20 다음 행렬에 대하여 $\det(\operatorname{adj} A)$의 값은? $\operatorname{adj} A$는 A의 수반행렬이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & -13 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

① -2
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

21 초기값 문제 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sin x$, $y(0) = 2$의 해에 대하여 $\{y(\pi)\}^2$의 값은?

① π
② $\pi + 2$
③ 2π
④ $2\pi + 2$
⑤ $2\pi + 4$

서울시립대학교

22 함수 $y_p = \left(ax^b + cx^d\right)e^x$가 미분방정식 $y'' - 2y' + y = (2x+1)e^x$의 특수해일 때 $ab + cd$의 값은?

① 2
② 3
③ 4
④ 5
⑤ 6

23 $\mathcal{L}$을 라플라스 변환, $\mathcal{L}^{-1}$을 그 역변환이라 하자. $F(s) = \frac{s}{s^2+4}e^{-\pi s}$이고 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$일 때 $f(2\pi)$의 값은?

① $-\pi$
② -1
③ 0
④ 1
⑤ π

24 함수 $f(x) = 2x$, $-1 < x < 1$의 푸리에 급수는?

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x)$
② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n}}{n\pi} \sin(n\pi x)$
③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x)$
④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \cos(n\pi x)$
⑤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \cos(n\pi x)$

서울시립대학교

25 다음 행렬을 $A = PDP^{-1}$로 대각화한다. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$이고 $a = 3$, $b = 1$, $c = 3$일 때 $d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2$의 값은?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

① 19 ② 20
③ 21 ④ 22
⑤ 23

26 좌표평면 위의 점들을 다음 순서대로 선분으로 연결한 경로를 C라 한다. 벡터장 $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(e^x - y, x - e^{y^2}\right)$의 선적분 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = a + \frac{b}{e}$일 때 $10a + b$의 값은? 단, a, b는 정수이고 e는 자연상수이다.

$(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$,
$(-1, 3)$, $(-2, 2)$, $(-2, 1)$, $(-1, 0)$

답: _____

27 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \, \mathrm{d}t = a\pi + b$일 때 $120(a^2 + b^2)$의 값은? 단, a, b는 유리수이다.

답: _____

서울시립대학교

28 극곡선 $r = -3\cos\theta$의 내부와 극곡선 $r = 1 - \cos\theta$의 외부에 동시에 놓인 영역의 넓이가 $a\pi + b$일 때 $11a^2 + b^2$의 값은? 단, a, b는 유리수이다.

답: _____

29 구면좌표계로 표현된 두 곡면 $\rho = 1 - \cos\varphi$와 $\rho = \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 입체 E에 대하여 $\iiint_E \frac{480}{\pi}\,\mathrm{d}V$의 값은?

답: _____

30 다음 초기값 문제의 해를 $y_1(t)$, $y_2(t)$라 하자. $y_1(1)y_2(1) = ae^b + ce^d$일 때 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$의 값은? 단, a, b, c, d는 정수이고 e는 자연상수이다.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 1.$$

답: _____