중앙대학교

문제편

30문항 · 60분

01 아래 극한의 값은?

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x^2)}{\tan^3 x}.$$

① 0 ② 1
③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$

02 아래 정적분의 값은?

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\tan x(1+\sec x)\,\mathrm{d}x.$$

① $\frac{1}{2}$ ② 1
③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$

03 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $(3-k,-1,0)$, $(-1,2-k,-1)$, $(0,-1,3-k)$가 일차종속이 되도록 하는 k의 값을 모두 더하면?

① 5 ② 8
③ 10 ④ 12

중앙대학교

04 $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=x^{x^{-2}}$의 극값의 종류와 값이 바르게 짝지어진 것은?

① 최솟값, $e^{\frac{1}{2e}}$
② 최댓값, $e^{\frac{1}{2e}}$
③ 최솟값, $e^{\frac{1}{e}}$
④ 최댓값, $e^{\frac{1}{e}}$

05 행렬 A는 고유값 2, 5와 이에 각각 대응하는 고유벡터 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$을 갖는다. b의 값은?

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

① 0
② 1
③ 3
④ 5

06 점 $A=(5,6)$을 원점 중심으로 시계반대방향으로 $45°$ 회전한 후 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 $B=(b,c)$라 하자. $b+c$의 값은?

① $-5\sqrt{2}$
② $5\sqrt{2}$
③ $\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$
④ $-\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$

중앙대학교

07 아래 정적분의 값은?

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x.$$

① $\dfrac{\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)}{24} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
② $\dfrac{\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)}{12} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
③ $\dfrac{\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)}{12} - \sqrt{3}+\sqrt{2}$
④ $\dfrac{\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)}{48} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

08 아래 함수 f에 대하여 $f'(0)$의 값은?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

① 1
② $\dfrac{1}{2}$
③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{4}$

09 실수 성분인 2×2 행렬의 벡터공간 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$에서 선형변환 $T(X) = XA$를 정의한다. T의 고유값을 중복을 허용하여 모두 더하면?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

① 5
② 10
③ 15
④ 20

중앙대학교

10 점 $(-5, 12)$를 직선 $y = tx$에 대하여 대칭이동한 점을 $(a(t), b(t))$라 하자. $-1 \le t \le 1$에서 곡선 $\gamma(t) = (a(t), b(t))$의 길이는?

① $13\dfrac{\pi}{2}$
② 13π
③ 15π
④ $15\dfrac{\pi}{2}$

11 아래 삼중적분의 값은?

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} x \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

① $\dfrac{\pi - 2}{2}$
② $\dfrac{\pi - 2}{4}$
③ $\dfrac{\pi - 2}{8}$
④ $\dfrac{\pi - 2}{16}$

12 두 점 $(-1, 1, -1)$과 $(1, 1, 1)$을 잇는 선분을 z축 중심으로 회전하여 얻은 곡면의 넓이는?
단, 다음 적분 공식을 이용할 수도 있다.

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{\ln|\sec x + \tan x|}{2} + C.$$

① $\pi\left(2\sqrt{3} + \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right)$
② $2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$
③ $\pi\left(\sqrt{6} + \ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right)$
④ $2\pi\left(\sqrt{6} + \ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right)$

중앙대학교

13 실수 성분인 2×2 행렬 A가 아래 조건을 만족할 때, $\mathrm{tr}(A^5)$의 값은?

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

① 33 ② 32
③ 31 ④ 30

14 3×3 행렬 A에 대하여 A, A^2, A^3의 대각합이 각각 2, 10, 20일 때, $\det A$의 값은?

① 3 ② 6
③ 2 ④ -2

15 실수 x, y, z가 $x + y + 2z = 2$, $z = x^2 + y^2$를 만족할 때, $e^{x^2+y^2+z^2}$의 최댓값은?

① e^3 ② e^6
③ e^8 ④ e^{10}

중앙대학교

16 평면 $x-2y+3z=0$을 만나지 않는 직선이 두 점 $(4,-5,6)$, $(0,0,a)$를 지날 때, $3a$의 값은?

① 32 ② 16
③ 8 ④ 4

17 $\mathbb{R}^3$에 아래 내적을 정의한다. 세 벡터 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, (a,b,c)가 이 내적에 대한 직교단위기저를 이룰 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

$$\begin{gathered}\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2-x_1y_3\\ -x_3y_1+4x_3y_3,\\ x=(x_1,x_2,x_3),\quad y=(y_1,y_2,y_3).\end{gathered}$$

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$
③ 1 ④ $\frac{4}{3}$

18 두 평면 $x+y+z=3$, $x-5y+z=3$에 접하고 중심이 직선 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 위에 있는 구의 반지름을 r라 하자. $\left(r-3\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$의 값은?

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{5}{16}$
③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{9}{16}$

중앙대학교

19 타원 $x^2+4y^2=5$ 위의 점 (a,b)에서의 접선이 두 점 $(3,2)$, $(c,0)$을 통과한다. $b>0$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -5 ② -8
③ -10 ④ -12

20 아래 특이적분의 값은?

$$\int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

① 1 ② $\sqrt{\pi}$
③ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

21 아래 보기 중 수렴하는 급수의 개수는?

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{7n+1}{n\sqrt{n}}$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

(다) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\sqrt{2\ln n+3}}$

(라) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

① 1개 ② 2개
③ 3개 ④ 4개

중앙대학교

22 함수 $f(x,y)=x^3+y^2-6xy+6x+3y$의 극소점을 (a,b)라 할 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$
③ $\frac{27}{2}$ ④ $\frac{37}{2}$

23 평면 $2x-y+2z=10$ 위에서 원점에 가장 가까운 점을 A라 하자. 평면 $x+2z=0$ 위에서 A에 가장 가까운 점을 (a,b,c)라 할 때, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$의 값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$
③ $\sqrt{5}$ ④ $2\frac{\sqrt{5}}{3}$

24 아래 영역 D에 대한 이중적분의 값은?

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2xy+4y^2\le 1\},$$
$$\iint_D (1-x^2-2xy-4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

① $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ② $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
③ $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ④ 0

중앙대학교

25 아래와 같이 매개화된 곡면의 넓이는?

$$x = e^r \cos\theta, \quad y = e^r \sin\theta, \quad z = e^r,$$
$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

① $\dfrac{\pi}{2}(e^2-1)$
② $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}(e^2-1)$
③ $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}(e-1)$
④ $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}(e^2-1)$

26 아래 곡선 $\boldsymbol{c}$를 따라 벡터장 $\boldsymbol{F}$의 선적분 $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$의 값은?

$$\boldsymbol{c}(t) = \left(\sqrt{t}, \arcsin t, t^5\right), \quad 0 \le t \le 1,$$
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2).$$

① $e+1$
② $e+\dfrac{2}{3}$
③ $e+\dfrac{1}{3}$
④ $e+\dfrac{1}{6}$

27 벡터장 $\boldsymbol{F}$와 곡면 S에 대하여 면적분 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$의 값은? 곡면의 방향은 위쪽이다.

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2+ye^z, y^2+ze^x, x^2+y^2+z^2),$$
$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \ge 0\right\}.$$

① $5\dfrac{\pi}{2}$
② $3\dfrac{\pi}{2}$
③ $\dfrac{\pi}{2}$
④ π

중앙대학교

28 실수 성분인 3×3 행렬 A의 고유값은 0, 1, 2이다. I는 3×3 항등행렬일 때, 항상 옳은 것은?

① $(A-I)^n$이 영행렬이 되는 자연수 n이 존재한다.
② $\mathrm{tr}(A-2I)=0$이다.
③ $A^2-3A+2I=O$이다. 단, O는 3×3 영행렬이다.
④ $(A+I)^{-1}$의 고유값은 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$이다.

29 아래 행렬 A에 대하여 $\|x\|=2$인 벡터 $x \in \mathbb{R}^3$에서 $\|Ax\|$의 최댓값은?

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

① $5\sqrt{2}$ ② 8
③ 10 ④ 11

30 차수가 2 이하인 실수 계수 다항식의 벡터공간 V에서 쌍대공간 V^*의 기저를 아래와 같이 정의한다. V의 기저 $\{f_1, f_2, f_3\}$가 이 기저의 쌍대기저일 때, $f_1(1)+f_2(1)+f_3(1)$의 값은?

$$\varphi_1(f)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\varphi_2(f)=f'(1), \quad \varphi_3(f)=f(0).$$

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$
③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$