서울과학기술대학교

문제편

20문항 · 100분

01 다음 극한의 값은?

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right].$$

① 0 ② $\frac{1}{2}$

③ 1 ④ 2

02 밑면의 반지름 2 m, 높이 4 m인 원뿔이 거꾸로 된 모양의 물탱크가 있다. 물을 $2\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$의 속도로 채울 때, 수심 3 m가 되는 순간 수위의 상승 비율은? 탱크 두께는 무시한다.

① $\frac{2}{9\pi}$ ② $\frac{4}{9\pi}$

③ $\frac{8}{9\pi}$ ④ $\frac{10}{9\pi}$

03 곡선 $y=e^{ax}$, $a>0$ 위의 점 A에서 접선 l이 원점 O를 지난다. A에서 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 AOB의 넓이를 최소로 하는 a의 값은?

① e ② $\frac{1}{e}$

③ e^2 ④ 1

서울과학기술대학교

04 곡선 $r = 3\sin\theta$의 내부에 놓인 곡선 $r = 1 + \sin\theta$의 길이는?

① $\sqrt{2}$
② 2
③ $2\sqrt{2}$
④ 4

05 정적분 $\int_7^{62} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}}\,\mathrm{d}x$의 값은?

① $\frac{52}{3}$
② $\frac{64}{3}$
③ 52
④ 64

06 정적분 $\int_0^1 \frac{x^2-2x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$의 값은?

① $-\frac{7}{8} + \ln 2$
② $-\frac{5}{4} + \ln 2$
③ $\frac{7}{8} + \ln 2$
④ $\frac{9}{8} + \ln 2$

서울과학기술대학교

07 $n=6$일 때 심프슨 공식으로 $\int_0^{2\pi}\ln(2+\cos x)\,dx$의 근삿값을 $a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$라 한다. $a+b+c$의 값은?

① $-\dfrac{\pi}{3}$ ② $\dfrac{-2\pi}{9}$

③ $\dfrac{\pi}{3}$ ④ $\dfrac{2\pi}{9}$

08 다음 무한급수의 합은?

$$1-\frac{\pi^2}{2^2\cdot 3!}+\frac{\pi^4}{2^4\cdot 5!}-\frac{\pi^6}{2^6\cdot 7!}+\cdots$$

① π ② $\dfrac{\pi}{2}$

③ $\dfrac{2}{\pi}$ ④ $\dfrac{1}{\pi}$

09 두 평면 $x+2y+z=2$와 $2x-y+z=1$의 교선을 L_1, 두 평면 $x-2y+z=1$과 $x+y-2z=1$의 교선을 L_2라 한다. 두 직선 사이의 거리는?

① $\dfrac{1}{\sqrt{26}}$ ② $\dfrac{3}{\sqrt{26}}$

③ $\dfrac{5}{\sqrt{28}}$ ④ $\dfrac{7}{\sqrt{28}}$

서울과학기술대학교

10 평면 $x+y+z=2$와 곡면 $z=2(x^2+y^2)$가 만나서 생기는 곡선을 C라 한다. 원점에서 곡선 C까지 거리의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① $2\sqrt{2}$
② $3\sqrt{3}$
③ 8
④ $5\sqrt{5}$

11 중심이 원점이고 장축과 단축의 길이가 각각 4와 2인 타원 $7x^2+6\sqrt{3}xy+13y^2=16$으로 둘러싸인 영역을 R이라 한다. $\iint_R xy\,\mathrm{d}A$의 값은?

① $-\dfrac{7\pi}{9}$
② $-6\sqrt{3}\pi$
③ $-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}$
④ $-\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{8}$

12 방정식 $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$로 주어진 곡면 S와 벡터장 $\boldsymbol{F}=(x,y,z)$에 대한 면적분 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$의 값은?
※ 원문에는 법선 방향이 없으며, 정답표의 별표는 바깥쪽 방향을 전제로 한다.

① 0
② 12π
③ 24π
④ 36π

서울과학기술대학교

13 미분방정식 $2xyy' = y^2 - 4x^2$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 3$을 만족하는 곡선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이는?

① 20π
② $\dfrac{25\pi}{2}$
③ 10π
④ $\dfrac{25\pi}{4}$

14 아래 미분방정식의 초기값 문제에서 $y(0)$의 값은?

$$e^y(e^x + 4y)\,\mathrm{d}x + (4xe^y - 1)\,\mathrm{d}y = 0,$$
$$y(1) = 0.$$

※ 기존 해설의 끝점 대입과 초기조건이 정하는 해의 차이를 해설에 적었다.

① e
② 1
③ -1
④ e^{-1}

15 아래 미분방정식의 초기값 문제에서 $y(-1)$의 값은?

$$y'' + y' - 20y = 20x + 9e^{-5x} - 1,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 7.$$

① $e^{-4} + 1$
② $e^{-5} + 1$
③ $e^4 - 1$
④ $e^5 - 1$

서울과학기술대학교

16 방사능 물질 A, B의 초기 양은 각각 200 mg이고 반감기는 각각 120시간, 180시간이다. 두 물질은 현재 양에 비례하는 비율로 감소한다. 540시간 뒤 A의 남은 양은 B의 남은 양의 몇 배인가?

① $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ② $\dfrac{1}{2}$

③ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ④ $\dfrac{1}{4}$

17 다음 중 참인 명제의 개수는?

(ㄱ) $n \times n$ 행렬 A, B, C에서 $\operatorname{rank} A = n$이고 $AB = AC$이면 $B = C$이다.

(ㄴ) $n \times n$ 정사각행렬은 항상 n개의 서로 다른 고윳값을 갖는다.

(ㄷ) $A^T = A^{-1}$인 실수 정사각행렬의 행렬식은 1이다.

(ㄹ) $A^T = A^{-1}$인 실수 정사각행렬의 고윳값 λ는 $|\lambda| = 1$을 만족한다.

(ㅁ) $A^T = A$인 실수 정사각행렬의 고윳값은 항상 실수이다.

(ㅂ) $m \times n$ 행렬의 순위를 a, 영공간 차원을 b라 하면 $a + b = m$이다.

① 2개 ② 3개

③ 4개 ④ 5개

18 아래 네 벡터로 생성되는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간을 H라 한다. $s = \dim H$일 때 $s + t$의 값은?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

※ 원문에는 차원을 고정하는 추가 조건이 없다. 기존 해설의 답이 유일한지 해설에서 확인했다.

① 0 ② -1

③ -3 ④ -5

서울과학기술대학교

19 평면 $ax+by+cz+d=0$, $d\neq 0$ 위 삼각형의 꼭짓점이 (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3)이다. $x_1=x_2=x_3=d$일 때 a의 값은?

① -1 ② 0
③ 1 ④ 2

20 아래 행렬 A에 대하여 A^{2021}의 모든 성분의 합은?

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

① 1 ② 3
③ 5 ④ 10