홍익대학교

문제편

15문항

원문 수학 영역 26–40번의 15문항을 교재 1–15번으로 정리했습니다. 별표(*)는 로그의 정의역·경계평면·마디 범위·삼각형 평면 조건을 명시하거나 수정한 문항입니다.

01* $0 < a < b$인 실수 a, b에 대해 $F(x) = \int_a^b t^x \, dt$라 할 때, 다음 중 잘못된 것은?

① $\ln F(x) = \displaystyle\int_a^b \ln(t^x) \, dt$

② $F(-1) = \ln b - \ln a$

③ $F(x) = \dfrac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1} \quad (x \neq -1)$

④ $F(x)$는 $x = -1$에서 연속이다.

02 실수에서 정의된 연속함수 f는 항상 $f(x) \geq 0$이고 $\int_1^4 f(t) \, dt = 2$를 만족한다. 다음 (가)–(라) 중 참인 명제의 개수를 구하시오.

(가) $f(x^2)$는 홀함수이고 $xf(x^2)$는 짝함수이다.

(나) $\int_{-1}^{1} tf(t^2) \, dt = 0$이다.

(다) $\int_{-2}^{1} tf(t^2) \, dt = -2$이다.

(라) $0 \leq \int_1^2 f(t^2) \, dt \leq 1$이다.

① 1개 ② 2개

③ 3개 ④ 4개

03 다음 중 이차곡선의 종류가 맞게 짝지어진 것을 고르시오.

① $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$: 포물선

② $2x^2 + 3xy + y^2 + x - y + 7 = 0$: 타원

③ $10x^2 - 10xy + y^2 - 5y = 0$: 타원

④ $x^2 + xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$: 쌍곡선

홍익대학교

04 다음 극한의 값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2}{n^2+k^2}\right)^{\frac{k}{n^2+k^2}}.$$

① $-\dfrac{\ln 2}{2}$ ② $-\dfrac{(\ln 2)^2}{4}$

③ $e^{-\frac{\ln 2}{2}}$ ④ $e^{-\frac{(\ln 2)^2}{4}}$

05 거듭제곱급수의 수렴반경을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^n.$$

① 0 ② 1

③ e ④ ∞

06 미분 가능한 함수 f, g, h가 주어졌다. 두 등위곡면 $g(x,y,z)=c$, $h(x,y,z)=k$의 교선 C 위에서 f를 제한하면 점 P에서 최댓값을 가진다. P에서 $\nabla f, \nabla g, \nabla h$는 영벡터가 아니고 $\nabla g, \nabla h$는 평행하지 않다. C의 P에서의 접선벡터를 v라 할 때 참인 명제를 모두 고르시오.

(가) ∇f는 v와 수직이다.
(나) ∇f는 v와 평행하다.
(다) v는 $\nabla g, \nabla h$와 모두 수직이다.
(라) v는 $\nabla g, \nabla h$의 일차결합으로 표현된다.
(마) ∇f는 $\nabla g, \nabla h$와 모두 수직이다.
(바) ∇f는 $\nabla g, \nabla h$의 일차결합으로 표현된다.

① (가), (다), (바) ② (가), (다), (마)

③ (나), (다), (바) ④ (나), (라), (마)

홍익대학교

07* 원기둥 $x^2+y^2=9$의 안쪽, xy평면 위쪽, x축을 포함하고 xy평면과 $30°$를 이루는 평면의 아래쪽인 입체 영역의 부피를 나타내는 적분식이 아닌 것은? 기울어진 경계평면은 $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$이다.

① $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\frac{y}{\sqrt{3}}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

② $\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{0}^{\sqrt{3}z}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

③ $\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{9-3z^2}}^{\sqrt{9-3z^2}}\int_{\sqrt{3}z}^{\sqrt{9-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

④ $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{3}\int_{0}^{\frac{r\sin\theta}{\sqrt{3}}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

08 다음 보기 중 $X^2=A$를 만족하는 2×2 실수행렬 X가 존재하지 않는 행렬 A는?

① $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

09 에르되시가 $80°C$ 커피를 두고 밖에 다녀오니 온도가 $30°C$였다. 돌아온 지 $\frac{1}{2}$시간 뒤에는 $25°C$였다. 실내 온도는 $20°C$로 일정하고, 커피의 온도 변화 속도가 주변 온도와의 차이에 비례할 때 자리를 비운 시간은 몇 시간인가?

① $\frac{\ln 3}{2}$ ② $\frac{\ln 12}{2}$

③ $\frac{2\ln 6}{\ln 2}$ ④ $\frac{\ln 6}{\ln 4}$

홍익대학교

10 $[0,\infty)$에서 연속이고 지수적 차수를 갖는 함수 $y(t)$가 초기값 문제

$$y''(t)+2ty'(t)-4y(t)=6,$$
$$y(0)=y'(0)=0$$

을 만족할 때 $y(2)$의 값을 구하시오.

① 3 ② 4
③ 6 ④ 12

11 잠자리의 위치가 벡터함수 $r(t)=(3\cos t, 2\sin t, t)$로 표현된다. 궤적 C 위의 점 $P_0=(3,0,0)$과 $P=(-3,0,\pi)$에 대해 맞지 않는 것을 고르시오.

① P_0에서 P까지 이동한 거리는 $\sqrt{5}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 t+1}\,dt$이다.
② P에서 주법선벡터는 $N=\frac{1}{\sqrt{5}}(j-2k)$이다.
③ P에서 가속도 벡터를 진행 방향과 수직 방향으로 분해하면 수직 성분의 크기는 3이다.
④ P에서 곡률은 $\frac{3}{5}$이다.

12 벡터장 $F=(x^2yz, xy^2z, xyz^2)$는 유체의 흐름 속도를 나타낸다. 주어진 점 중 입자가 가장 빨리 회전하는 점을 고르시오.

① $(3,0,0)$ ② $(2,1,0)$
③ $(1,1,1)$ ④ $(0,0,0)$

홍익대학교

13 벡터장 $F = (x + yz, 2y - zx, 3z + 2x^2y)$를 주어진 입체영역의 경계곡면에서 바깥쪽 방향으로 면적분한 값이 가장 큰 것을 고르시오.

① $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

② $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$를 꼭짓점으로 갖는 사면체

③ $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$을 꼭짓점으로 갖는 정팔면체

④ $\{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$

14* 양 끝점이 고정된 현의 수직 변위 $u(x, t)$가

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = u(L, t) = 0,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

를 만족한다. $a, L > 0$이고 해는 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$,

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

이다. 다음 중 맞지 않는 것은?

① $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$이다.

② 각 자연수 n에 대해 u_n은 $x = k\frac{L}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$인 점이 고정된 마디인 정상파 운동을 한다.

③ $f(x) = \frac{1}{4}x(L - x)$이면 $A_n = \frac{L^2(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}$이다.

④ $f(x) = \sin \frac{3\pi x}{L}$이면 $n \neq 3$일 때 $A_n = 0$이다.

15* 삼각형 ABC의 꼭짓점의 위치벡터를 원점 O에서 출발하는 a, b, c로 나타내자. 삼각형과 같은 평면 위 두 점 P, Q의 위치벡터 p, q가 아래 식을 만족할 때 두 점과 삼각형의 관계를 옳게 기술한 것을 고르시오. 내심은 세 내각 이등분선, 외심은 세 변의 수직이등분선, 수심은 세 꼭짓점에서 대변에 내린 수선의 교점이다.

$$(p - a) \cdot (b - c) = 0$$
$$(p - b) \cdot (c - a) = 0$$
$$(p - c) \cdot (a - b) = 0$$
$$\left(q - \frac{a + b}{2} \right) \cdot (a - b) = 0$$
$$\left(q - \frac{b + c}{2} \right) \cdot (b - c) = 0$$
$$\left(q - \frac{c + a}{2} \right) \cdot (c - a) = 0$$

① P: 내심, Q: 외심

② P: 외심, Q: 내심

③ P: 수심, Q: 외심

④ P: 수심, Q: 내심