중앙대학교

문제편

30문항 · 60분

01 타원 $5x^2+8xy+5y^2=1$의 장축의 길이는?

① $\frac{2}{3}$ ② 1

③ 2 ④ 4

02 곡면 $x^2y^3z=6\sqrt{3}$, $x,y,z>0$ 위의 점과 원점 사이 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{6}$

③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$

03 극좌표 곡선 $r=1+\cos\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$와 두 좌표축으로 둘러싸인 영역의 넓이는?

① $3\frac{\pi}{8}+1$ ② $\frac{\pi}{2}+1$

③ $5\frac{\pi}{8}+1$ ④ $5\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}$

중앙대학교

04 아래 행렬 A와 $x \in \mathbb{R}^4$, $x \neq 0$에 대하여 $\frac{x^T A^T A x}{x^T x}$의 최댓값은? T는 전치를 뜻한다.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

① 5
② 9
③ 10
④ 16

05 아래 함수 f가 $(x, y) = (1, 0)$에서 가장 빠르게 증가하는 방향은?

$$f(x,y) = -x \ln \frac{1}{1+e^{-y}} - (1-x) \ln \frac{e^{-y}}{1+e^{-y}}.$$

① $(0, -1)$
② $(1, 0)$
③ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
④ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

06 벡터장 $\boldsymbol{F}$의 원 C를 따른 선적분 $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}r$의 값은? C는 시계반대방향이다.

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (y \sin x + xy \cos x, xy^2 + x \sin x),$$
$$C : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1.$$

① $61\frac{\pi}{4}$
② $63\frac{\pi}{4}$
③ $65\frac{\pi}{4}$
④ $67\frac{\pi}{4}$

중앙대학교

07 아래 조건에서 $(s,t)=(0,1)$일 때 $\frac{\partial z}{\partial s}$의 값은?

$$z=\frac{e^{x-y}}{(1+e^{-y})(1+e^{x})},$$
$$x=st^2,\quad y=s^2t.$$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{8}$
③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{32}$

08 3×3 행렬 A의 고유값 0, 1, 2에 각각 대응하는 고유벡터는 아래와 같다. $A^2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$일 때, $a_1+a_2+a_3$의 값은?

$$v_0=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

① 1 ② 3
③ 5 ④ 7

09 함수 $f(x,y)=x^4-4xy+y^4$가 최솟값을 갖는 점에서 $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$의 값은?

① 1 ② 48
③ 128 ④ 160

중앙대학교

10 아래 A, b에 대하여 $\left\| A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - b \right\|$가 $(x, y) = (a_1, a_2)$에서 최소일 때, $a_1 + a_2$의 값은? $\|v\|$는 유클리드 길이이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$

③ -1 ④ -2

11 미분방정식 $y'' - 2y' + y = te^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$의 해에 대하여 $y(1)y(-1)$의 값은?

① $5\dfrac{e^2}{2}$ ② $\dfrac{35}{36}$

③ $\dfrac{7}{5}$ ④ $\dfrac{17}{18e^2}$

12 아래 함수 $F(s)$의 라플라스 역변환을 $f(t)$라 할 때, $f(\pi) + f'(\pi)$의 값은?

$$F(s) = \frac{17}{s^3 - 5s^2 + 4s + 10}.$$

① $e^{3\pi} + e^{-\pi}$ ② $-2e^{3\pi} - 2e^{-\pi}$

③ 0 ④ $2e^{3\pi} + 2e^{-\pi}$

중앙대학교

13 함수 $g(t) = e^{3t}(\sin(4t) + 4t\cos(4t))$의 라플라스 변환을 $G(s)$라 할 때, $G(5)$의 값은?

① $-\frac{5}{32}$ ② $\frac{2}{25}$

③ $\frac{4}{25}$ ④ $\frac{8}{25}$

14 아래 연립미분방정식을 만족하는 $x(t), y(t)$에 대하여 $x\left(\frac{1}{2}\right) - y\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

$$x' + 5x + y = 0, \quad x - y' - 3y = 0,$$
$$x(1) = 1, \quad y(1) = 0.$$

① 0 ② e^2

③ $-2e^2$ ④ $2e^2$

15 미분방정식 $2(t^3+1)y' - 3t^2(y^3 - y) = 0$, $y(0) = 2$의 해에 대하여 $y(-1)$의 값은?

① 1 ② 0

③ $e^{-1} - 1$ ④ $e^{-1} + 1$

중앙대학교

16 미분방정식 $x^2y'' + xy' + 4y = x^2 + 8$, $y(1) = \frac{1}{8}$, $y'(1) = \frac{9}{4}$의 해에 대하여 $y\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)$의 값은?

① $3 + \dfrac{e^{\pi}}{8}$ ② $1 + \dfrac{e^{\pi}}{8}$

③ $4 + \dfrac{e^{\pi}}{8}$ ④ $\dfrac{e^{\pi}}{8}$

17 미분방정식 $y''' + 4y'' + 13y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$의 해에 대하여 $y(\frac{\pi}{2})$의 값은?

① $\dfrac{5 + 5e^{-\pi}}{13}$ ② $\dfrac{5 - e^{-\pi}}{13}$

③ $\dfrac{5 + e^{-\pi}}{13}$ ④ $\dfrac{5 - 5e^{-\pi}}{13}$

18 미분방정식 $y' - y - e^x \sin x \sin(2x) = 0$, $y(0) = 1$의 해에 대하여 $y(\frac{\pi}{2})$의 값은?

① $\dfrac{5}{6}e^{\frac{\pi}{2}}$ ② $e^{\frac{\pi}{2}}$

③ $-\dfrac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$ ④ $\dfrac{5}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$

중앙대학교

19 실내온도가 $10°\mathrm{C}$인 시험장에 초기온도 $60°\mathrm{C}$의 온열팩을 가져왔다. 10분 뒤 온열팩의 온도는 $50°\mathrm{C}$였다. 온도 변화율이 현재 온열팩과 실내온도의 차이에 비례할 때, 처음부터 $30°\mathrm{C}$가 되기까지 걸린 총 시간은 몇 분인가?

① $10\log_{0.8}(0.4)$ ② $10\log_{0.5}(0.1)$

③ $10\log_{0.8}(0.5)$ ④ $10\log_{0.8}(0.2)$

20 미분방정식 $e^{2x}y' - 2e^{2x} = e^{y}$, $y(0) = -1$의 해에 대하여 $y(1)$의 값은?

① $2 + \ln(e-1)$ ② $2 - \ln(e-1)$

③ $2 + \ln(e+1)$ ④ $2 - \ln(e+1)$

21 미분방정식 $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$의 해에 대하여 $y(1)$의 값은?

① $e^{3}(2e-4)$ ② $e^{3}(2e^{2}-4)$

③ $e^{3}(2e+4)$ ④ $e^{3}(2e^{2}+4)$

중앙대학교

22 주기가 4인 함수 $f(x)$의 아래 복소 푸리에 급수에서 c_n은? 단, $n \neq 0$이다.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 2 \end{cases},$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi\frac{x}{2}}.$$

① $\frac{i}{n\pi}[(-1)^n - 1]$
② $\frac{i}{n\pi}[1 - (-1)^n]$
③ $\frac{i}{n\pi}[(-1)^n + 1]$
④ $\frac{i}{n\pi}[(-1)^{n+1} - 1]$

23 아래 함수 f의 푸리에 적분에서 $A(\alpha) + B(\alpha)$의 값은? 단, $\alpha \neq \pm 1$이다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi, \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)]\,\mathrm{d}\alpha.$$

① $\frac{1 - \cos(\alpha\pi) + \sin(\alpha\pi)}{1 - \alpha^2}$
② $\frac{1 + \cos(\alpha\pi) + \sin(\alpha\pi)}{1 - \alpha^2}$
③ $\frac{1 + \cos(\alpha\pi) - \sin(\alpha\pi)}{1 - \alpha^2}$
④ $\frac{1 - \cos(\alpha\pi) - \sin(\alpha\pi)}{1 - \alpha^2}$

24 아래 보기 중 표시한 영역에서 수렴하는 로랑 급수가 바르게 구해진 것의 개수는?

(가) $\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}(z-1)^{k-1}}{2^{k+1}}$, $|z-1| < 2$.

(나) $\frac{4}{(z-i)(z+3i)} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[-\frac{i^k}{3^{k+1}} + (-1)^{k+1}i^k\right] z^k$, $|z| > 3$.

(다) $\frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2(z-1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{2^{k+2}}$, $0 < |z-1| < 2$.

(라) $\frac{1}{z(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{z^{k+3}}$, $|z| > 1$.

① 1개
② 2개
③ 3개
④ 4개

중앙대학교

25 닫힌 경로 C는 시계반대방향의 원 $|z| = 2$이다. 아래 적분의 값은?

$$\oint_C \left[\frac{\sin z}{(2z-\pi)^2(z-2\pi)} + \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\right] \mathrm{d}z.$$

① $\left(4\pi e^2 + \frac{2}{9\pi}\right)i$

② $\left(8\pi e^2 - \frac{2}{9\pi}\right)i$

③ $\left(4\pi e^2 - \frac{2}{9\pi}\right)i$

④ $\left(8\pi e^2 + \frac{2}{9\pi}\right)i$

26 아래 보기 중 옳은 것의 개수는? $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이고 f, g, h는 복소함수이다.

(가) 모든 z에 대하여 $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$이다.

(나) $\sin z$가 실수이면 z는 항상 실수이다.

(다) $f(z) = 2z + \overline{z}^2$는 전해석함수이다.

(라) $g(z) = \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$는 $z_0 = 0$에서 진성 특이점을 갖는다.

(마) $h(z) = \frac{\cos z}{z^4 \sin z}$는 $z_0 = 2\pi$에서 단순극점이며 유수는 $\frac{1}{16\pi^4}$이다.

① 2개 ② 3개

③ 4개 ④ 5개

27 복소함수 $f(z) = (\cosh z - 1)\sinh z$를 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$로 전개했을 때, $\frac{a_4 + a_5}{a_3}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{6}$

③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{24}$

중앙대학교

28 닫힌 경로 C는 시계반대방향의 원 $|z|=1$이다. 아래 적분의 값은?

$$\oint_C \left[\frac{1}{z^2\sin z}+\left(\frac{1}{z^2}+z+z^3\right)e^{\frac{1}{z}}\right]\mathrm{d}z.$$

① $11\pi\dfrac{i}{12}$ ② $13\pi\dfrac{i}{12}$

③ $15\pi\dfrac{i}{12}$ ④ $17\pi\dfrac{i}{12}$

29 복소방정식 $\cos z=-3i$의 해가 아닌 것은?

① $41\dfrac{\pi}{2}-i\ln\left(\sqrt{10}-3\right)$

② $23\dfrac{\pi}{2}-i\ln\left(\sqrt{10}+3\right)$

③ $21\dfrac{\pi}{2}-i\ln\left(\sqrt{10}-3\right)$

④ $37\dfrac{\pi}{2}-i\ln\left(\sqrt{10}+3\right)$

30 아래 특이적분의 값은?

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

① $-\dfrac{\pi}{4}$ ② $\dfrac{\pi}{4}$

③ $-\dfrac{\pi}{2}$ ④ $\dfrac{\pi}{2}$