한양대학교

문제편

25문항

원문 1번은 시험 유형 안내입니다. 수학 문항 2–26번을 교재 1–25번으로 정리했습니다. 기존 교재의 누락·오기는 추가 원본과 대조했고, 마지막 5문항은 주관식입니다.

01 다음 보기에서 수렴하는 급수를 모두 고르면?

ㄱ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(2n^3)}{1+n^2}$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n}$

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 곡면 $x+3y^2+z^4=5$ 위의 점 $(1,1,1)$에서의 접평면을 α라 하자. 점 $(-2,a,b)$가 α 위에 있을 때 a^2+b^2의 최솟값은?

① $\dfrac{5}{4}$
② $\dfrac{7}{4}$
③ $\dfrac{9}{4}$
④ $\dfrac{11}{4}$
⑤ $\dfrac{13}{4}$

03 함수 $f(x)=\frac{\sin x}{2+e^x}$의 $x=0$에서의 4차 테일러 다항식을 $p(x)$라 할 때 $p(1)$은?

① $\dfrac{4}{27}$
② $\dfrac{14}{81}$
③ $\dfrac{16}{81}$
④ $\dfrac{2}{9}$
⑤ $\dfrac{20}{81}$

한양대학교

04 곡선 $y=\frac{3x}{1+x^3}$과 세 직선 $y=0$, $x=1$, $x=5$로 둘러싸인 부분을 y축 중심으로 회전하여 얻은 입체의 부피는?

① $3\pi+\ln 21$
② $\pi+3\ln 21$
③ $3\pi\ln 21$
④ $2\pi+\ln 63$
⑤ $2\pi\ln 63$

05 영역 $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 1+2\cos\theta \le r \le 4\cos\theta\}$의 넓이는?

① $\frac{8\pi-\sqrt{3}}{6}$
② $\frac{9\pi-2\sqrt{3}}{6}$
③ $\frac{10\pi-3\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{11\pi-4\sqrt{3}}{6}$
⑤ $\frac{12\pi-5\sqrt{3}}{6}$

06 $\int_0^2\int_{2y}^4 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,dy$의 값은?

① $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
② $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$
③ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{17}-1}{3}$
⑤ $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$

한양대학교

07 두 평면 $z=2y$, $z=0$과 곡면 $y=2x-x^2$로 둘러싸인 부분을 S라 할 때 $\iiint_S x\,\mathrm{d}V$의 값은?

① $\frac{16}{15}$ ② $\frac{15}{14}$

③ $\frac{14}{13}$ ④ $\frac{13}{12}$

⑤ $\frac{12}{11}$

08 곡면 $\sigma : x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$과 벡터장

$$F(x,y,z)=(x+y)i+(3z^2+y)j+(x+z)k$$

에 대해 $\iint_\sigma F\cdot n\,\mathrm{d}S$는? 단, n은 외향단위법선벡터이다.

① 12π ② 18π

③ 24π ④ 30π

⑤ 36π

09 선형사상

$$T(x,y,z)=(x+2y+z,x+y+z,2x+7y+az,3x+5y+bz)$$

의 치역 차원이 2이고 핵 차원이 c일 때 $a+b+c$는? 단, a,b,c는 상수이다.

① 3 ② 4

③ 5 ④ 6

⑤ 7

한양대학교

10 $M_3(\mathbb{R})$에서

$$\begin{cases} a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}=0 & (j=1,2,3) \\ a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}=0 & (i=1,2,3) \\ a_{11}+a_{22}+a_{33}=0 \\ a_{13}+a_{22}+a_{31}=0 \end{cases}$$

을 만족하는 행렬 (a_{ij})의 집합을 U라 하자. $a_{ij}=-a_{ji}\ (1\le i,j\le 3)$을 만족하는 행렬의 집합을 W라 할 때, 부분공간 $U+W=\{u+w : u\in U, w\in W\}$의 차원은?

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

11 선형사상 $T(a,b,c,d,e)=(a+b,b+c,c+d,d+e,3e)$에 대해 벡터 $v=(0,1,0,0,0)$를 포함하는 가장 작은 T 불변부분공간의 차원은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

12 두 행렬

$$A=\begin{pmatrix} 3&0&0&0 \\ 1&3&0&0 \\ 0&0&3&2 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3&0&0&0 \\ 5&3&0&0 \\ 0&0&3&0 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix}$$

의 특성다항식을 각각 $f_A(x), f_B(x)$, 최소다항식을 $m_A(x), m_B(x)$라 하자. 옳은 보기를 모두 고르면?

ㄱ. $f_A(x)=f_B(x)$
ㄴ. $m_A(x)=m_B(x)$
ㄷ. A와 B는 닮은 행렬이다.
ㄹ. $f_A(x)=m_B(x)g(x)$인 실수 계수 다항식 $g(x)$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄹ
③ ㄴ, ㄹ ④ ㄱ, ㄴ, ㄹ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

한양대학교

13 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$가 $\det A=8$이고 $\mathbb{R}^3$의 모든 영이 아닌 벡터가 A의 고유벡터일 때 $a+e+i$는?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

14 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ. 4차 가역행렬 A와 $B=(\det A)A^{-1}$에 대해 $\det(A^3)=\det B$이다.
ㄴ. 5차 행렬 $A=(a_{ij})$가 $a_{ij}=-a_{ji}\ (1\le i,j\le 5)$를 만족하면 $\det A=0$이다.
ㄷ. 부분공간 W_1, W_2, W_3에 대해 $(W_1+W_2)\cap W_3=(W_1\cap W_3)+(W_2\cap W_3)$이다.

① ㄱ ② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 미분방정식 $x'(t)+3x(t)=4$의 해가 $x(0)=5$를 만족할 때 $\lim_{t\to\infty} x(t)$는?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$
③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$
⑤ $\frac{5}{3}$

한양대학교

16 미분방정식 $x'(t)+2x(t)=e^t\sqrt{x(t)}$의 해가 $x(0)=4$를 만족할 때 $x(1)$은?

① $\left(\frac{e}{4}+\frac{7}{4e}\right)^2$ ② $\left(\frac{e}{4}-\frac{7}{4e}\right)^2$

③ $\left(7\frac{e}{4}+\frac{1}{4e}\right)^2$ ④ $\left(\frac{e}{4}-\frac{9}{4e}\right)^2$

⑤ $\left(\frac{e}{4}+\frac{9}{4e}\right)^2$

17 미분방정식 $xx''-(x')^2-2tx^2=0$의 해가 $x(0)=2$, $x'(0)=2$를 만족할 때 $x(3)$은?

① $2e^{12}$ ② $2e^{14}$

③ $2e^{16}$ ④ $2e^{18}$

⑤ $2e^{20}$

18 생명체의 개체 수 $x(t)$가

$$x''+5x'+6x=0,\quad x(0)=5\cdot 10^{21},\quad x'(0)=-8\cdot 10^{21}$$

을 따라 감소한다고 예측하였다. 이 예측에 따른 $t=10$의 개체 수는?

① $10^{21}(8e^{-20}-e^{-30})$ ② $10^{21}(7e^{-20}-2e^{-30})$

③ $10^{21}(6e^{-20}-3e^{-30})$ ④ $10^{21}(5e^{-20}-4e^{-30})$

⑤ $10^{21}(4e^{-20}-5e^{-30})$

한양대학교

19 함수 f의 라플라스 변환이

$$F(s)=\frac{e^{-4s}}{s^2+3}+\frac{s-1}{(s-2)^2+3}$$

일 때 $\ln\left(f\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right)\right)$는?

① $\sqrt{3}\frac{\pi}{9}$ ② $2\sqrt{3}\frac{\pi}{9}$

③ $\sqrt{3}\frac{\pi}{3}$ ④ $4\sqrt{3}\frac{\pi}{9}$

⑤ $5\sqrt{3}\frac{\pi}{9}$

20 연립미분방정식

$$\begin{cases}x'(t)=x(t)+y(t)+2e^{-t}\\ y'(t)=4x(t)+y(t)+4e^{-t}\end{cases}$$

의 해가 $x(0)=3$, $y(0)=6$을 만족할 때 $2x(\ln 2)+y(\ln 2)$는?

① 102 ② 105

③ 108 ④ 111

⑤ 114

21 [주관식] 곡면

$$F(u,v)=(2u\cos v,2u\sin v,u^2),\quad \sqrt{3}\le u\le 2\sqrt{2},\quad 0\le v\le 3$$

의 넓이를 구하시오.

답: _____

한양대학교

22 [주관식] 실수 x, y, z가 $3x^2 + y^2 + z^2 = 20$을 만족할 때 xyz^3의 최댓값을 구하시오.

답:

23 [주관식] 벡터공간 V의 기저 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$에 대한 $T : V \to V$의 행렬표현이

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

이다. 기저 $\{v_1, T(v_1), T^2(v_1), v_4\}$에 대한 T의 표현행렬을 A라 할 때, A의 모든 성분의 합을 구하시오.

답:

24 [주관식] 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

의 복소수 범위의 서로 다른 네 고윳값을 a, b, c, d라 할 때, $abcd$를 구하시오.

답:

한양대학교

25 [주관식] 반지름 비가 $2:3$인 구 모양의 두 눈덩이로 큰 눈덩이 위에 작은 것을 올려 눈사람을 만들었다. 녹을 때 각 부피는 표면적에 정비례하는 비율로 감소하고, 비례상수는 두 눈덩이에 대해 동일하며 두 눈덩이는 구 모양을 유지한다. 처음 부피를 V_1, 키가 처음의 $\frac{1}{2}$가 되었을 때의 부피를 V_2라 하자. $\frac{V_2}{V_1}=\frac{q}{p}$일 때 $p+q$을 구하시오. 단, p, q는 서로소인 자연수이다.

답: